



北京大学

博士生研究生学位论文

题目： 磁声波对地球辐射带电子的
作用：观测与模拟

姓 名： 李金星

学 号： 1101110446

院 系： 地球与空间科学学院

专 业： 空间物理

研究方向： 磁层物理

导 师： 傅绥燕 教授

濮祖荫 教授

谢伦 副教授

二零一五年六月

版权声明

任何收存和保管本论文各种版本的单位和个人，未经本论文作者同意，不得将本论文转借他人，亦不得随意复制、抄录、拍照或以其他方式传播。否则一旦引起有碍作者著作权之问题，将可能承担法律责任。

摘要

地球的辐射带充满了被磁场捕获的高能粒子，电子辐射带可分为内带、外带及中间的槽区。辐射带电子受磁层超低频波、合声波、嘶声、电磁离子回旋波、电子静电回旋波以及磁声波等多种波动的影响，呈现出加速、损失、投掷角变化等多种动态变化。其中，磁声波对辐射带高能电子效应的研究尚比较空白，从前既没有卫星观测的直接证据，也没有电子动态模拟。

本论文发展了模拟带电粒子长时间运动的变分辛积分算法，并应用于模拟与磁声波激发相关的环电流质子漂移运动中。这种辛积分算法相比传统的龙格-库塔法，具有数值稳定性和物理守恒性等优势。本论文改进并发展了电磁波对辐射带电子共振作用的试验粒子模拟算法。本论文指出了 Bortnik 等前人的公式中有符号问题，它导致在模拟磁声波对电子作用过程中产生严重错误。改进后的算法可有效地模拟磁声波对电子的加速和散射过程。

本论文利用准线性理论与试验粒子模拟两种方法研究磁声波对辐射带电子作用的机制。传统的准线性理论只考虑磁声波对粒子的朗道共振作用。然而磁声波被约束在磁赤道附近，当它在沿磁力线方向不能传播足够多波长时，朗道共振之外的 transit-time 效应起显著作用。针对 CLUSTER 卫星观测到的一个磁声波事例，通过计算等离子体层内的磁声波对电子作用的扩散系数，本论文发现两种方法的结果比较吻合。但对于等离子体层外的磁声波，两种方法得到的结果有明显差异。本论文指出，在高密度区（等离子体层）的磁声波主要通过朗道共振对电子作用，对电子在平行方向上加速。而在等离子体层外的低密度区，transit-time 散射效应显著，在这种情况下准线性理论不适用于计算磁声波对电子的作用。

在 2013 年 6 月 29 日磁暴期间，范阿伦卫星在内辐射带与槽区观测到 ~ 100 keV 电子迅速形成蝴蝶状投掷角分布，同时观测到强磁声波的活动。利用两颗范阿伦卫星在多点的高精度波动观测数据，本论文率先建立了具有多次谐波精细结构与传播方向分布的磁声波模型，及其在全球磁地方时的分布。结合试验粒子模拟与福克-普朗克扩散模拟，本论文揭示了磁声波可通过朗道共振的平行加速，将近 90° 投掷角的高能电子散射至两边的投掷角上，从而形成蝴蝶状角向分布。在 2013 年 8 月 21 日，范阿伦 A 卫星观测到强磁声波甚至可在 1 分钟时间将外辐射带中心的 ~ 100 keV 电子快速形成蝴蝶状分布，本论文通过粒子模拟再现了这种现象。最近的 2015 年 3 月 18 日大磁暴期间，卫星观测显示磁声波增强后，能量高达 4.2 MeV 的外辐射带超相对论电子形

成了蝴蝶状分布。

本论文联合范阿伦卫星观测及数值模拟，首次指出磁声波是形成内辐射带与槽区、以及外辐射带的高能电子蝴蝶状角向分布的关键因素，并可潜在地对超相对论电子形成蝴蝶状角向分布。由于磁声波的存在，辐射带高能电子不再集中在磁赤道附近，而大量分布在中高纬，从而使中高纬空间也充满辐射。

关键词：磁声波, 辐射带, 高能粒子, 蝴蝶状分布, 朗道共振

The Impact of Magnetosonic Waves on Earth's Radiation Belt Electrons: Observations and Simulations

Jinxing Li (Space Physics)

Directed by Prof. Suiyan FU, Zuyin PU and Lun XIE

ABSTRACT

Earth's radiation belts are filled with energetic particles trapped by Earth's magnetic field. The electron radiation belt is comprised of the inner belt, the outer belt and a 'slot' in between. Responding uniquely to various plasma waves including the ULF, chorus, hiss, EMIC, ECH and magnetosonic waves, radiation belt electrons exhibit different types of highly dynamic evolution, including acceleration, loss and pitch angle variation. However, the role of magnetosonic waves to the energetic electrons is yet to be uncovered, because neither observational evidence nor dynamic simulations had indicated the impact of magnetosonic waves on the radiation belts.

This dissertation applied the variational symplectic integrator to magnetospheric dynamics study, and simulated the ring current ion dynamics related to the excitation of magnetosonic waves. Comparing to the traditional integrators such as the standard 4th-order Runge-Kutta, the variational symplectic integrator has the advantage of numerical accuracy and physical conservation property. This dissertation improved and developed the gyro-averaged test particle simulation formulas for simulating the resonant interaction between electromagnetic waves and charged particles, and pointed out a sign problem of the formulas derived previously by Bortnik and used by many, which may cause significant error in simulating the interactions between magnetosonic waves and electrons. The revised formula can correctly and promptly simulate the particle scattering and acceleration by the magnetosonic waves.

To investigate the mechanism of the interactions between magnetosonic waves and electrons, this dissertation applied both the quasi-linear theory and the test particle simulations. From the quasi-linear theory point of view, the magnetosonic wave can interact with the electrons via Landau resonance only. However, since the magnetosonic waves are confined near the magnetic equator, and their wavelengths along the magnetic field are usually long, a sig-

nificant transit-time scattering may take place. For a large-amplitude magnetosonic wave observed by CLUSTER, this dissertation compared its quasi-linear diffusion coefficients to the test particle simulations results, and showed a consistency between these two methods for magnetosonic waves inside the plasmasphere, but a significant inconsistency for magnetosonic waves outside the plasmasphere. This dissertation indicates that Landau resonance plays the main role for the interactions between electrons and magnetosonic waves in the high density plasmasphere regions, while the transit-time effect is significant for magnetosonic waves in the low density regions.

During the June 29, 2013 geomagnetic storm, the Van Allen Probe measurements show a formation process of energetic electron in the inner belt and the slot region, where a strong magnetosonic wave enhancement was also detected. Based on the high quality measurements by both probes in multiple regions and time, this dissertation, for the first time, constructed an accurate magnetosonic wave model including a harmonic structure, a distribution of wave normal angle and a spatial distribution over magnetic local times. By combining test particle calculations and Fokker-Planck simulations, this dissertation reveals that magnetosonic wave can scatter the near 90° pitch angle electrons to the small and large pitch angles via a parallel acceleration related to Landau resonance, creating the butterfly distributions. An intense magnetosonic wave can even rapidly create butterfly distributions of ~ 100 keV electron in the heart of outer radiation belt in just 1 minutes, as observed by Van Allen Probe A on August 21, 2013, and reproduced via a dynamic simulation. During the recent March 18, 2015 intense geomagnetic storm, observations show that when the magnetosonic waves enhanced, ultra-relativistic electrons with energy up to 4.2 MeV present butterfly distributions.

By combining the Van Allen Probe observations and the wave-particle interaction simulations, this dissertation reveals that scattering by equatorial magnetosonic waves is a significant cause for the formation of energetic electron butterfly distributions in the inner radiation belt, the slot region and the outer belt. The magnetosonic waves can potentially create the butterfly distributions to ultra-relativistic electrons. Because of the existence of magnetosonic waves, the high energy electrons are not concentrated near the magnetic equator but also populated in the medium and high latitudes, making the high latitudes also radioactive.

KEYWORDS: Magnetosonic waves, Radiation belt, Energetic particles, Butterfly distribution, Landau resonance

主要符号对照表

本论文主要应用国际有理化单位制。但在第三章第一节，因为有大量的公式推导，因而采用了基于国际单位制的自然单位制，即假设电子质量、电荷与真空速度都为1，即 $m_e = 1, q_e = 1, c = 1$ 。现将本论文中主要用到的符号列于下列表中。

I. 与粒子相关的符号

m	粒子质量
m_e	电子质量
e	基本元电荷
q	粒子带电量
$\mathbf{p}$	粒子动量
p	粒子动量大小
$\mathbf{P}$	粒子正则动量
$p_\perp$	粒子垂直动量
$p_\parallel, U$	粒子平行动量
E, E_k	粒子能量
γ, Γ	相对论因子
α	粒子投掷角
α_{eq}	粒子赤道投掷角
μ	粒子磁矩，第一绝热不变量

$\mathbf{v}$	粒子速度
$v_{\parallel}$	平行速度
$v_{\perp}$	垂直速度
$\mathbf{v}_E$	电场漂移速度
$\mathbf{v}_g$	梯度漂移速度
$\mathbf{v}_c$	曲率漂移速度
μ	粒子磁矩, 第一绝热不变量
J	粒子第二绝热不变量
Φ	粒子磁通不变量, 第三不变量
H	粒子哈密顿量
L	粒子拉格朗日量
Ω	带电粒子有符号的回旋频率
ω_{ce}	电子回旋角频率
f_{ce}	电子回旋频率
f_{cp}	质子回旋频率
Ω_{He+}	氦离子回旋角频率
Ω_{O+}	氧离子回旋角频率
ω_d	漂移频率
ω_b	弹跳频率
τ_b	弹跳周期
ρ	回旋半径
$T_{\parallel}$	平行温度
$T_{\perp}$	垂直温度
j	粒子的微分通量
f	粒子相空间密度
n	粒子数密度

II. 与电磁场相关的符号

$\mathbf{E}$	电场
$\mathbf{E}^\dagger$	修正的电场
$\mathbf{B}$	磁感应强度（文中也简化作磁场强度）
$\mathbf{B}^\dagger$	修正的磁感应强度
$\mathbf{B}_0$	背景磁场强度
$\mathbf{A}$	磁矢势
$\mathbf{A}^\dagger$	修正的磁矢势
ϕ	电势
$\phi^\dagger$	修正的电势
$\mathbf{D}$	电位移矢量
$\mathbf{k}$	波矢
ψ, θ	波动传播角
$k_{\parallel}$	平行波数
$k_{\perp}$	垂直波数
$\mathbf{B}^w$	磁场波动
$\mathbf{E}^w$	电场波动
ω	频率
f_{pe}	电子等离子体频率
ω_{pe}	电子等离子体角频率
f_{UHR}	高混杂频率
f_{LHR}	低混杂频率
Φ	波动相位
$\mathcal{K}$	介电张量
c	真空中的光速
σ	电导率
$\mathbf{n}$	折射率矢量
n	折射率大小
ϵ_0	真空中的介电常数
μ_0	真空中的磁导率
v_A	阿芬速度
$\mathbf{J}$	电流密度
ν	碰撞阻力系数

III. 与波粒相互作用相关的符号

η	波粒相互作用相位
θ	粒子回旋相位
$D_{\alpha\alpha}$	投掷角扩散系数
D_{pp}	动量扩散系数
D_{EE}	能量扩散系数
D_{ap}	投掷角、动量交叉扩散系数
$D_{\alpha E}$	投掷角、能量交叉扩散系数
$D_{\mu\mu}$	磁矩扩散系数

IV. 与地球相关的符号

R_E, R_e	地球半径
L	McIlwain L参数
M	地球磁矩
λ	磁纬度
ω_E	地球自转角频率

V. 书中出现的重要缩略词

VSI	Variational Symplectic Integrator, 变分辛积分
RK4	4th-order Runge-Kutta, 4阶龙格-库塔
MS	Magnetosonic, 磁声（波）
MLT	Magnetic Local Time, 磁地方时
ULF	Ultra Low Frequency, 超低频
VLF	Very Low Frequency, 甚低频
EMIC	Electromagnetic Ion Cyclotron, 电磁离子回旋（波）
ECH	Electrostatic Electron Cyclotron Harmonic, 电磁离子回旋（波）
QLT	Quasi-Linear Theory, 准线性理论
TPS	Test Particle Simulation, 试验粒子模拟
SVD	Singular Value Decomposition, 奇异值分解

VI. 卫星及载荷名称缩略词

POES	Polar Orbiting Environmental Satellite
SAMPEX	Solar Anomalous and Magnetospheric Particle Explorer
THEMIS	Time History of Events and Macroscale Interactions during Substorms
CRRES	The Combined Release and Radiation Effects Satellite
ECT	The Energetic Particle, Composition, and Thermal Plasma Suite
EMFISIS	The Electric and Magnetic Field Instrument Suite and Integrated Science
EFW	The Electric Field and Waves Suite
RBSPICE	The Radiation Belt Storm Probes Ion Composition Experiment
RPS	The Relativistic Proton Spectrometer
REPT	The Relativistic Electron-Proton Telescope
MagEIS	Magnetic Electron Ion Spectrometer
HOPE	Helium, Oxygen, Proton, and Electron
HFR	High Frequency Receiver
WFR	WaveForm Receiver
MAG	Fluxgate Magnetometer

目录

主要符号对照表	V
第一章 地球电子辐射带与内磁层电磁波动简介	1
1.1 地球辐射带及带电粒子运动	1
1.1.1 地球辐射带简介	1
1.1.2 辐射带研究的重要意义	2
1.1.3 带电粒子在辐射带中的运动	4
1.2 等离子体波动理论	7
1.2.1 等离子体的介电张量	7
1.2.2 等离子体波的色散关系	11
1.2.3 波动模型	13
1.2.4 准线性扩散理论简介	14
1.3 内磁层中的波动	15
1.3.1 超低频波	16
1.3.2 合声波	17
1.3.3 嘶声	20
1.3.4 电磁离子回旋波	23
1.3.5 电子静电回旋波	26
1.4 磁层快磁声波	27
1.4.1 磁声波的冷等离子体色散关系	27
1.4.2 磁声波的观测特性	27
1.4.3 磁声波的激发	28
1.4.4 磁声波的传播	28
1.4.5 磁声波对电子的作用	33
1.5 磁声波研究的重要性	36
1.6 波动与粒子的数据来源：范阿伦卫星	37
1.6.1 背景	37
1.6.2 科学目标	37
1.6.3 设计	39

1.6.4 卫星载荷	39
第二章 磁声波的观测：卫星数据分析	43
2.1 WFR仪器的磁声波频谱观测	43
2.2 低频磁声波：磁强计数据分析	44
2.3 高精度Waveform数据分析	46
2.3.1 磁声波高精度频谱结构：波形的坐标转换与相位校正	47
2.3.2 传播角的计算	47
2.4 小结	49
第三章 粒子运动与波粒作用模拟	51
3.1 导心运动的变分辛积分模拟	51
3.1.1 变分辛积分算法	53
3.1.2 相对论电子在偶极地磁场中的运动	56
3.1.3 环电流质子漂移运动模拟	56
3.2 波对粒子共振作用的试验粒子模拟	60
3.2.1 哨声模波动模型	60
3.2.2 粒子在回旋坐标($e_z, e_\perp, e_\theta$) 中的运动	61
3.2.3 粒子在共振过程中的运动	63
3.2.4 电子能量、投掷角与磁矩的变化	66
3.2.5 与 Bell 公式的比较：符号问题	68
3.2.6 波对粒子的非线性作用：向心加速力对相位捕获的影响	69
3.3 小结	72
第四章 磁声波对电子作用的机制：朗道共振与 transit-time 效应	73
4.1 宽频磁声波对电子的作用的试验粒子模拟	73
4.1.1 单色磁声波对电子作用的模拟	74
4.1.2 宽带磁声波与电子作用模拟	75
4.1.3 试验粒子模拟的简化	77
4.2 准线性理论与试验粒子模拟比较	81
4.2.1 准线性理论与实验粒子模拟的比较	81
4.2.2 Transit-time效应	83
4.3 小结	85
第五章 磁声波与电子的朗道共振效应：高能电子的蝴蝶状分布	87
5.1 槽区与内辐射带电子蝴蝶状角向分布	87

5.2 磁声波形成槽区电子蝴蝶状分布的观测依据	89
5.3 磁声波对高能电子作用的动态模拟	91
5.3.1 磁声波频谱与传播角分布	91
5.3.2 磁声波对电子作用的扩散系数计算	94
5.3.3 嘶声及其扩散系数模拟	96
5.3.4 电子相空间密度动态变化模拟	97
5.4 磁声波形成电子蝴蝶状角向分布的机制：朗道共振	99
5.5 磁声波散射外辐射带中心电子的观测与模拟	100
5.6 磁声波散射超相对论电子形成蝴蝶状分布	102
5.7 小结	104
第六章 本论文主要结论与成果	107
6.1 创新点	108
6.2 工作展望	110
参考文献	113
附录 A 波动与粒子各参数在各文献中的不同约定	123
附录 B 扩散曲线方程的推导	125
博士期间发表的论文统计	127
致谢	129

第一章 地球电子辐射带与内磁层电磁波动简介

地球辐射带是被地球磁场所约束的高能带电粒子聚集的区域，由于它的发现者是美国科学家 James Van Allen，因此也被称为范阿伦带。地球辐射带受太阳风活动及磁暴活动影响，在超低频波、合声波、磁声波、电磁离子回旋波、嘶声、电子静电回旋波等多种波动作用下具有复杂的动态变化。当卫星穿越地球辐射带时，其中的高能带电粒子对无防护的太阳能电池、集成电路以及传感器都会造成灾害性损坏。宇航员穿越辐射带时也会受到高能粒子的致命伤害。研究辐射带及其区域内的电磁波动，有助于我们了解高能带电粒子动态变化的物理机制，从而应用于将来空间天气预报。磁声波是辐射带中一种重要的波动。本章我们在扼要阐述地球辐射带结构、带电粒子运动规律和等离子体波动理论之后，将一一介绍内磁层各种波动，并着重总结近年来人们对磁声波观测特性、激发机制、传播规律等方面的研究成果。最后说明研究磁声波对揭示辐射带动态变化的重要意义。由于本论文的研究主要应用了最新发射的范阿伦卫星数据，本章最后对该卫星及其载荷做一个简介。

1.1 地球辐射带及带电粒子运动

1.1.1 地球辐射带简介

地球辐射带是被地球磁场稳定约束的高能带电粒子所在的区域。1958年 James Van Allen 领导的科学团队设计并发射了探索者(Explorer)1号卫星，其搭载的盖革计数器(Geiger counter)探测到地球空间有大量的($> 100 \text{ keV}$)电子与离子。他们把这些高能粒子所在的区域命名为辐射带，也叫范阿伦辐射带。辐射带的发现开启了磁层物理学科，近年来多颗科学卫星的观测使人们对地球外层空间环境有了大量的新认识。从前人们已经知道极光、磁暴等现象，多颗卫星的探索也改变、深化及拓展了我们对这些现象的认识。

地球电子辐射带由外带、内带与中间的槽区组成^[1]，如图1.1所示。通常外辐射带位于 $L=2.8-8$ 区域（这里 L 代表磁力线在磁赤道上的地心距离，以地球半径 R_E 为单位量化^[2]），中心区域通常在 $L=4-5$ 处。内辐射带位于 $L=1.2-2$ 区域，中心区域在 $L=1.5$ 附近。内、外辐射带中间的区域为电子通量极小值的槽区。与电子辐射带不同，地球质子辐射带没有分层结构^[3]。一般而言，辐射带的高能粒子被地球磁场长时间稳定地约束。磁层顶边界附近的磁场时常在太阳风的作用下扭曲或压缩，因而不能稳定

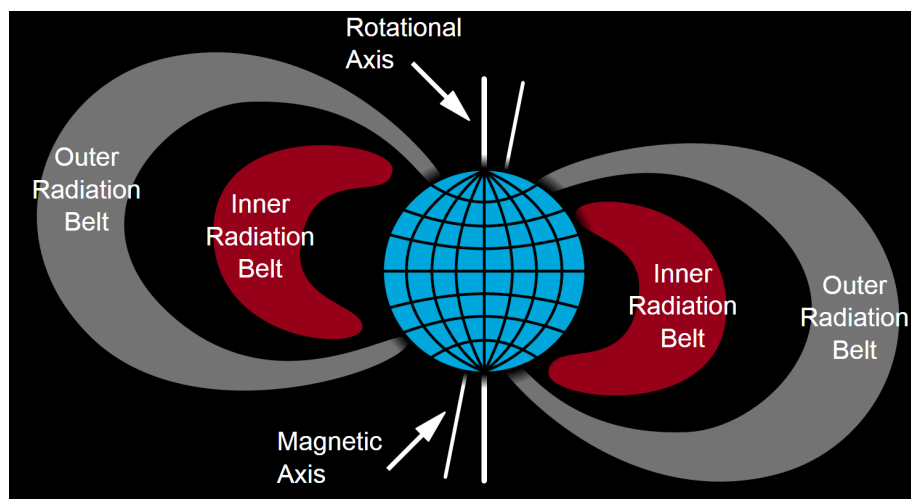


图 1.1 地球电子辐射带示意图。地球电子辐射带可分为内辐射带，外辐射带，以及之间的槽区。图片来自wikipedia。

约束高能粒子；在低高度，由于高能电子容易与致密的大气碰撞从而损失，所以辐射带通常在 200-1000 公里以上^[3]。

在太阳风与地磁活动影响下，外辐射带在磁暴期间具有非常强的动态变化。图1.2a 为 Baker 等人利用 SAMPEX (Solar Anomalous and Magnetospheric Particle Explorer) 卫星在 1992 至 2004 年一个太阳周期时间里所探测的 2-6 MeV 电子的通量在不同L壳层的动态变化^[4]。图 1.2b 为 2003 年初至 2004 年 4 月的观测，显示高能电子在一年多时间里更细节的动态变化。内辐射带与槽区电子可在相当长的时间里稳定地存在，然而也受大磁暴影响。图 1.2b 显示，在 2003 年 Hallowe'en 磁暴期间，外辐射带 MeV 高能电子侵入槽区，使得先前相对安全的槽区也充满高能电子辐射。

1.1.2 辐射带研究的重要意义

同步轨道卫星、导航卫星都运行于辐射带环境中，深空探测航天器、载人登月航天器都需要穿越辐射带环境。辐射带的高能粒子对航天器各器件都有灾害性影响^[5]，具体表现在：

1) 0.1-10 MeV 辐射带高能电子是卫星的“杀手”。这些高能电子可穿透屏蔽层，沉积在电介质内，当积累的电荷形成的电场超过介质的击穿阈值时，产生静电放电从而导致航天器部件的失效。

2) 辐射带可对空间电子器件造成单粒子事件。单个高能电离粒子可造成存储单元翻转、状态锁定、逻辑电路瞬时效应等等，甚至造成物理损坏，导致器件永久失效。

3) 辐射带高能、高穿透力粒子可对航天材料造成辐射损伤，导致各种材料与器

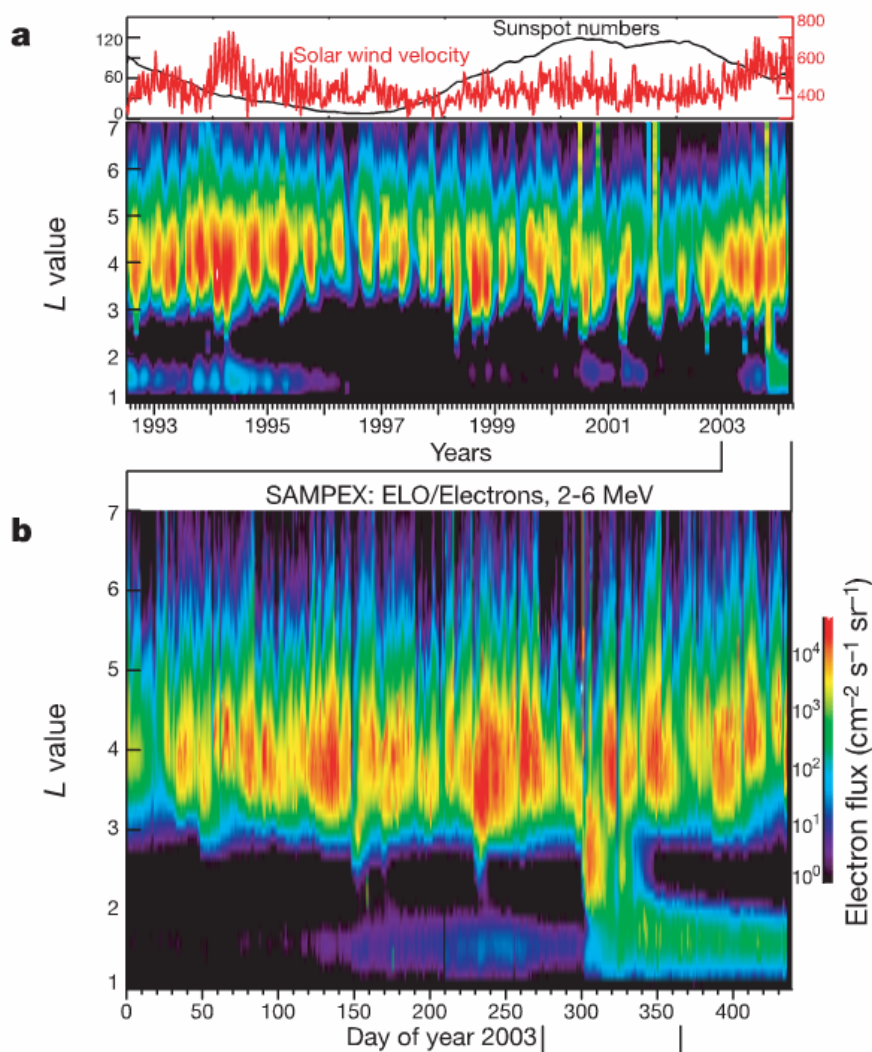


图 1.2 辐射带在 11 年里的长周期变化与 2003 年 Hallowe'en 磁暴的影响^[4]。a) SAMPEX 卫星在 1992 年至 2004 年间探测的 2-6 MeV 电子通量在不同高度随时间变化示意图。b) 2003-2004 年的电子通量的动态变化。

件性能变差，极大缩短航天设备的寿命。

4) 高能电磁辐射及高能粒子辐射可穿入人体细胞，使细胞分子电离，甚至可击断DNA链或造成化学变异。人体在辐射环境中可导致严重灼伤、肿瘤、组织损伤甚至快速死亡。

由于航天器维修困难和发射成本高，研究辐射带各种现象及其物理机制，对未来的空间天气预报、航天器维护及其寿命的延长，以及对航天员的保护都至关重要。此外，辐射带的研究具有广泛的科学意义^[3]，包括：

1) 辐射带对空间环境及诸多地球物理现象起重要甚至关键作用。辐射带高能电子携带的能量释放到大气层中，可形成极光、大气光以及电离化现象。被捕获的等离子体可形成电流并产生磁场。

2) 辐射带的研究有助于我们了解波粒相互作用的基本物理过程。被捕获的不同能量的电子与离子可激发、耗散、反射及折射各种电磁波，这些电子与离子也可通过电磁波交换能量。

3) 地球辐射带的研究对探索更广泛的空间区域里的高能现象有重要意义。木星等外行星具有与地球相似的辐射带以及高能粒子加速过程，太阳表面与行星际也有高能粒子加速现象，更高能的宇宙射线（高达 $\sim 10^{14}$ MeV 的高能粒子）的探索对揭示银河系的起源有重要意义。

1.1.3 带电粒子在辐射带中的运动

要了解辐射带高能带电粒子的运动规律，首先要了解单个粒子在稳恒场中的绝热运动。刘维定理有助于我们研究大量带电粒子在电磁场中的集体运动，也有助于利用卫星观测数据建立带电粒子全球分布模型。

单粒子在磁场中三种绝热运动

在地球磁场约束下，单个带电粒子在稳恒场下具有三种周期性绝热运动。应用带电粒子的绝热运动及其对应的绝热不变量，可大大方便我们计算粒子的运动轨迹。带电粒子在电磁场中的运动由洛伦兹方程描述

$$\dot{\mathbf{p}} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B} \right). \quad (1.1)$$

这里 $\mathbf{p}$ 代表粒子动量， m 为粒子质量， q 为带电量， $\gamma \equiv \sqrt{1 + p^2/m^2c^2}$ 是相对论因子， $\mathbf{E}$ 代表电场矢量， $\mathbf{B}$ 代表磁场矢量。在变化的电磁场中，电荷的运动一般是非线性的，也没有解析解。在有背景磁场存在的情况下，粒子具有绕磁力线的快速回旋运动。如果电荷在磁场中的回旋运动周期远小于电磁场变化的特征时间，或者回旋半径

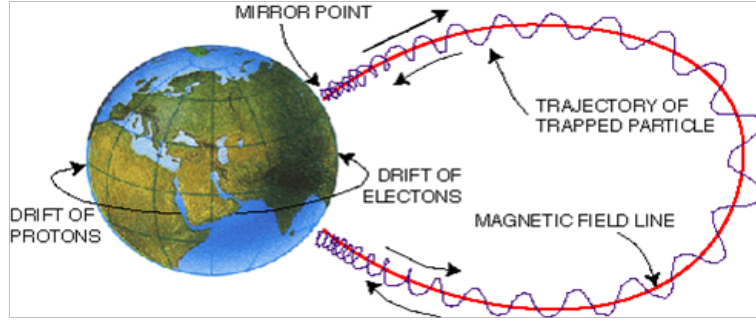


图 1.3 地球磁场捕获的带电粒子的三种绝热运动示意图。带电粒子有快速的回旋运动，往返南北两镜点间的弹跳运动，以及围绕地球的漂移运动。

远小于背景场空间变化的特征长度，电荷的运动可近似地分解为回旋运动与引导中心（导心）运动的叠加。通常我们只关心粒子导心的运动。对回旋运动做平均，就可以得到粒子导心运动，它可以分解为沿磁力线的运动，以及跨越磁力线的漂移运动。在缓变电磁场中，在垂直于磁力线平面内，粒子导心的漂移速度可分解为电场漂移速度 $\mathbf{v}_E$ 、磁场梯度漂移速度 $\mathbf{v}_g$ 与磁场曲率漂移速度 $\mathbf{v}_c$ 的叠加。非相对论下三种速度的大小分别为

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_E &= \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}, \\ \mathbf{v}_g &= \frac{W_{\perp}}{qB^3} \mathbf{B} \times \nabla B, \\ \mathbf{v}_c &= \frac{2W_{\parallel}}{qB^3} \mathbf{B} \times \nabla B.\end{aligned}\tag{1.2}$$

电荷漂移的总速度为三个速度的叠加。相对论下电荷导心的磁场漂移速度为

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{qm} \frac{p_{\perp}^2}{(\gamma + 1)\gamma B^3} \mathbf{B} \times \nabla B,\tag{1.3}$$

$$\mathbf{v}_c = \frac{1}{qm} \frac{p_{\parallel}^2}{\gamma B^3} \mathbf{B} \times \nabla B.\tag{1.4}$$

电荷在地球磁场中的运动可以分解为三种周期性运动：围绕磁力线的快速的回旋运动，沿着磁力线在南北半球磁镜点之间往返的弹跳运动，以及由磁场梯度与曲率导致的围绕整个地球的缓慢漂移运动^[3]，如图 1.3 所示。

在稳恒场（或缓变场）中，电荷的每一种周期性运动，都对应着一个绝热不变量，即运动积分常量。利用绝热不变量可方便我们理解并计算粒子运动。电荷运动的洛伦

兹方程，对应于一个哈密顿系统（相对论形式）

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sqrt{[\mathbf{P} - q\mathbf{A}(\mathbf{x})]^2 + m^2 c^4} + q\phi(\mathbf{x}). \quad (1.5)$$

这里 $\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 是正则动量， ϕ 是电势且 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ 。沿三种周期性运动的粒子轨道对正则动量积分

$$C = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.6)$$

我们可以定义三个绝热不变量

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{p_{\perp}^2}{2qB}, \\ J &= 2p \int_{m1}^{m2} \sqrt{1 - B(s)/B_m} ds, \\ \Phi &= q \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

其中第一绝热不变量 μ 为磁矩，第二绝热不变量 J 也叫纵向积分不变量，第三绝热不变量 Φ 也叫磁通不变量。

刘维定理

上面所述的单粒子绝热运动可用于预测单个粒子在空间中的导心运动轨迹。然而，我们同样也关心在不同区域里粒子的通量或相空间密度分布。由于卫星只能在轨道上探测粒子的通量，刘维定理可帮助我们将有限点的测量拓展到更大空间里的粒子分布。刘维定理表明，对于可用哈密顿函数描述的粒子系统，粒子在运动轨迹上的相空间密度守恒。这样卫星在某个空间位置探测到某个能量与投掷角的粒子的微分通量（可转化为相空间密度），即可知在该电子轨迹上各点的通量（与相空间密度）。

以粒子在三维空间 (q^1, q^2, q^3) 中的非相对论运动为例，粒子运动的哈密顿函数为 $H(q^1, q^2, q^3, p^1, p^2, p^3)$ ，这里 p^i 表示对应的动量。粒子的运动满足哈密顿关系

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (1.8)$$

粒子在坐标、动量的六维相空间 $(q^1, q^2, q^3, p^1, p^2, p^3)$ 中的运动还需满足连续性方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q^i} (f \dot{q}^i) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial p^i} (f \dot{p}^i) = 0, \quad (1.9)$$

将此方程展开，即

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} f + \sum_{i=1}^3 f \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^i} + \sum_{i=1}^3 \dot{p}^i \frac{\partial}{\partial p^i} f + \sum_{i=1}^3 f \frac{\partial \dot{p}^i}{\partial p^i} = 0. \quad (1.10)$$

把方程 (1.8) 代入方程 (1.10) 得

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} f + \sum_{i=1}^3 f \frac{\partial^2 H}{\partial q^i \partial p^i} + \sum_{i=1}^3 \dot{p}^i \frac{\partial}{\partial p^i} f - \sum_{i=1}^3 f \frac{\partial^2 H}{\partial p^i \partial q^i} = 0, \quad (1.11)$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} f + \sum_{i=1}^3 \dot{p}^i \frac{\partial}{\partial p^i} f = 0. \quad (1.12)$$

上式可写成全微分式

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad (1.13)$$

即粒子沿运动轨迹，其周围的相空间密度不随时间改变。

由于卫星通常可探测在某一能量附近，从某个角度附近入射的带电粒子通量 $j(\theta, E)$ ，这里 θ 是方位角， E 是指能量。通过粒子数守恒，我们可以建立通量与相空间密度的关系^[3]

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{j(\theta, E)}{p^2}, \quad (1.14)$$

这里 p 为粒子动量大小。

1.2 等离子体波动理论

地球磁层捕获着不同能量的等离子体，它们可以激发、耗散、反射及折射各种电磁波。这些波动可通过共振相互作用，与带电粒子发生能量、动量交换，改变电子的一个或多个绝热不变量^[6]。这一节我们介绍等离子体波动的基本理论，主要是波动的色散关系，以及波动模型的建立。等离子体波动色散关系给出波长（或波数、折射率）跟频率的关系，从而可以得到波动的相速度与群速度。通过色散关系与麦克斯韦方程组，对于给定振幅、频率、传播方向的波动，我们可以得到其磁场与电场的各方向分量，从而建立波动模型。这是我们后面模拟波粒相互作用的基础，因此我们较为详细地推导等离子体波动的色散关系。

1.2.1 等离子体的介电张量

空间等离子体中存在电流，为了方便求等离子体波动的色散关系，我们需要把等离子体电流密度 $\mathbf{J}$ 看成是电介质中的位移电流，通过用电场 $\mathbf{E}$ 表示 $\mathbf{J}$ ，我们可以引入

一个介电张量 (dielectric tensor) $\mathcal{K}$ 。麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.16)$$

在空间等离子体中，麦克斯韦方程可写为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

在傅里叶相空间里，每个单色波动都满足

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -i\mu_0 \mathbf{J} - \frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

其中电流密度可由欧姆定理给出 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ，在有背景磁场 $\mathbf{B}_0$ 存在时，等离子体为各向异性，电导率 σ 是张量。由此麦氏方程变为

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -i\omega \mu_0 \sigma \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}, \quad (1.19)$$

即

$$\frac{c^2}{\omega^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \mathcal{K} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.20)$$

或写成

$$(\mathbf{nn} - n^2 \mathcal{I} + \mathcal{K}) \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.21)$$

这里 $\mathbf{n}$ 是折射率矢量 $\mathbf{n} = c\mathbf{k}/\omega$ ， $\mathcal{K}$ 是介电张量



$$\mathcal{K} = \mathcal{I} + \frac{i}{\omega \epsilon_0} \sigma. \quad (1.22)$$

在上述方程中，电导率张量可以从电流的扰动得到

$$\mathbf{j} = \sum_s q_s n_s \mathbf{v}_s = \sigma \cdot \mathbf{E}. \quad (1.23)$$

由于冷等离子体为非相对论，考虑碰撞阻力 $\nu \mathbf{V}$ ，粒子的运动由动量方程给出

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \nu \mathbf{V}, \quad (1.24)$$

由上述方程我们得到

$$\mathbf{V} = \frac{e}{m} \frac{1}{\nu + i\omega} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (1.25)$$

写成分量形式为

$$\mathbf{V} = \frac{e}{m} \frac{1}{\nu + i\omega} \begin{bmatrix} E_x + V_y B \\ E_y - V_x B \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

我们定义速度 $V_{\pm}$ 与电场 $\epsilon_{\pm}$

$$V_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x \pm iV_y), \quad (1.27)$$

$$\epsilon_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x \pm iE_y), \quad (1.28)$$

则方程 (1.25) 可写为

$$\begin{aligned} V_+ &= \frac{e}{m} \frac{1}{\nu + i\omega} (E_+ - iBV_+) \\ &= \frac{\Omega}{\nu + i\omega} \left(\frac{E_+}{B} - iV_+ \right), \end{aligned} \quad (1.29)$$

这里

$$\Omega = \frac{qB}{m}, \quad (1.30)$$

为带符号的电荷回旋频率。方程 (1.29) 即

$$V_+ = \frac{\Omega}{\nu + i\omega + i\Omega} \frac{E_+}{B}. \quad (1.31)$$

同样的我们可以得到,

$$V_- = \frac{\Omega}{\nu + i\omega - i\Omega} \frac{E_-}{B}. \quad (1.32)$$

此外在平行方向上我们可以得到

$$V_z = \frac{e}{m} \frac{E_z}{\nu + i\omega}. \quad (1.33)$$

由欧姆定理 (1.23) 我们可以得到

$$\sigma_{\pm} = \sum_s \frac{1}{\nu + i\omega \pm i\Omega} \epsilon_0 \omega_{ps}^2 \quad (1.34)$$

以及

$$\sigma_z = \sum_s \frac{1}{\nu + i\omega} \epsilon_0 \omega_{ps}^2. \quad (1.35)$$

这里

$$\omega_{ps}^2 = \frac{nq_s^2}{\epsilon_0 m_s} \quad (1.36)$$

为电荷的等离子体频率平方。

我们定义

$$\begin{aligned} R &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega(\omega + \Omega_s - i\nu)}, \\ L &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega(\omega - \Omega_s - i\nu)}, \\ P &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega(\omega - i\nu)}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

则方程 (1.22) 变成

$$\mathcal{K} \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{E}_+ \\ \mathcal{E}_- \\ \mathcal{E}_{\parallel} \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

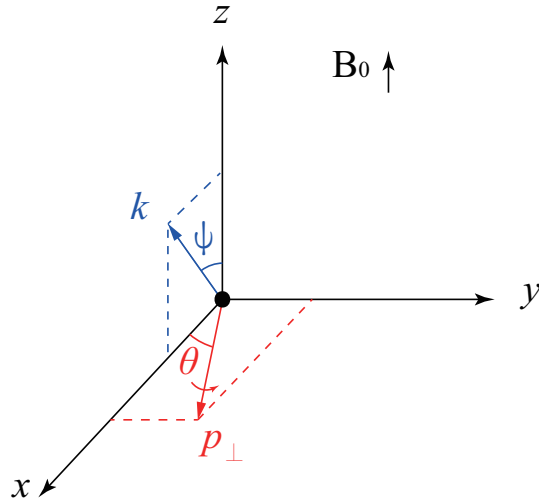


图 1.4 等离子体波的波数示意图。

我们需要把电场变换回原来的 xyz 坐标系，转变关系为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_+ \\ \varepsilon_- \\ \varepsilon_{\parallel} \end{bmatrix} = \mathcal{T} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \mathcal{T}^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_+ \\ \varepsilon_- \\ \varepsilon_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

这里

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

变换回原先 xyz 坐标后，方程 1.38 变为

$$\mathcal{K} \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} S & iD & 0 \\ -iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

这里

$$S = (R + L)/2; \quad D = (R - L)/2. \quad (1.42)$$

1.2.2 等离子体波的色散关系

有了介电张量，我们可以将它代入到麦克斯韦方程 (1.21) 中，得到磁化等离子体波动的色散关系。为方便起见，我们选取一个坐标系，使得背景磁场沿 z 方向，而波

数 $\mathbf{k}$ 在 xz 平面, 如图 1.4 所示。波数矢量与背景磁场的夹角为 θ , 则有

$$k_x = k \sin \theta, \quad k_y = 0, \quad k_z = k \cos \theta. \quad (1.43)$$

麦克斯韦关系 (1.21) 可变为

$$\begin{bmatrix} n_x^2 - n^2, & n_x n_y, & n_x n_z \\ n_y n_z, & n_y^2 - n^2, & n_y n_z \\ n_z n_x, & n_z n_y, & n_z^2 - n^2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E} + \mathcal{K} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.44)$$

即

$$\mathcal{A} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.45)$$

这里

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta, & iD, & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ -iD, & S - n^2, & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta, & 0, & P - n^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (1.46)$$

方程 (1.45) 电场的非零解要求 $\det(\mathcal{A}) = 0$, 即

$$An^4 - Bn^2 + C = 0, \quad (1.47)$$

这里

$$\begin{aligned} A &= S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta, \\ B &= RL \sin^2 \theta + PS(1 + \cos^2 \theta), \\ C &= PRL. \end{aligned} \quad (1.48)$$

上述方程的解为

$$n^2 = \frac{B \pm F}{2A}, \quad (1.49)$$

其中

$$F^2 = (RL - PS)^2 \sin^4 \theta + 4P^2 D^2 \cos^2 \theta. \quad (1.50)$$

对于无碰撞等离子体, $\nu = 0$, $F^2 \geq 0$, 所以 F 是实数。因而折射率 n 为纯实数, 或者纯虚数。

1.2.3 波动模型

在模拟电磁波动的激发、传播及其与粒子的相互作用中，我们需要知道波动的数值模型，它满足电磁波的物理特性。从色散关系方程 (1.45)，以及法拉弟定理 (1.15)，我们可以得到电场和磁场各分量之间的比值。

$$\begin{aligned}
\frac{E_x}{B_y} &= \frac{P - n^2 \sin^2 \psi}{P n \cos \psi}, \\
\frac{E_y}{B_y} &= i \frac{D(P - n^2 \sin^2 \psi)}{P n \cos \psi (S - n^2)}, \\
\frac{E_z}{B_y} &= -\frac{n \sin \psi}{P}, \\
\frac{B_x}{B_y} &= -i \frac{D(P - n^2 \sin^2 \psi)}{P(S - n^2)}, \\
\frac{B_z}{B_y} &= i \frac{D \sin \psi (P - n^2 \sin^2 \psi)}{P \cos \psi (S - n^2)}.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

根据这个比例关系，我们可以建立波动场模型。波动场复数形式表达式为

$$\mathbf{B}^w = \mathbf{B}_0^w e^{i\Phi}, \quad \mathbf{E}^w = \mathbf{E}_0^w e^{i\Phi}, \tag{1.52}$$

这里 $\Phi = \omega t - \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}$ 是波动相位。由于 E_x, E_z 与 B_y 是同相位， E_y, B_x 与 B_z 是同相位。给定总的磁场振幅 B_{tot}^w ，代入各电磁场分量之间比例，我们可以得到单色平面波的实数表达式

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^w &= \mathbf{e}_x B_x^w \cos \Phi + \mathbf{e}_y B_y^w \sin \Phi + \mathbf{e}_z B_z^w \cos \Phi, \\
\mathbf{E}^w &= \mathbf{e}_x E_x^w \sin \Phi + \mathbf{e}_y E_y^w \cos \Phi + \mathbf{e}_z E_z^w \sin \Phi.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

其中 $\mathbf{E}_0^w$ 与 $\mathbf{B}_0^w$ 各分量为

$$E_x^w = I^w (S - n^2)(P - n^2 \sin^2 \psi), \quad (1.54)$$

$$E_y^w = I^w D(P - n^2 \sin^2 \psi), \quad (1.55)$$

$$E_z^w = -I^w n^2 \cos \psi \sin \psi (S - n^2), \quad (1.56)$$

$$B_x^w = -I^w D \cos \psi (P - n^2 \sin^2 \psi) n/c, \quad (1.57)$$

$$B_y^w = I^w P \cos \psi (S - n^2) \mu/c, \quad (1.58)$$

$$B_z^w = I^w D \sin \psi (P - n^2 \sin^2 \psi) n/c, \quad (1.59)$$

这里

$$I^w = \frac{B_{tot}^w}{n \sqrt{D^2(P - n^2 \sin^2 \psi)^2 + P^2 \cos^2 \psi (S - n^2)^2}}. \quad (1.60)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时，电场 $\mathbf{E}$ 与传播方向 $\mathbf{k}$ 平行，且 $B^w/E^w = 0$ ，波动为纯静电波。

1.2.4 准线性扩散理论简介

经典的准线性扩散理论（Quasi-linear diffusion theory）是研究辐射带波粒相互作用的重要方法。近年来，准线性理论为模拟辐射带中多种波动对电子作用提供了可行的方法。

研究波动和粒子相互作用的集体效应，需要用 Vlasov 方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.61)$$

我们把物理量写成 $F = F_0 + F_1$ ，这里 $F_0 = \langle F \rangle$ 是物理量 F 的快时间尺度平均值，而 F_1 是扰动量，即 $\langle F_1 \rangle = 0$ 。在非线性时间尺度中， F_0 可以是时间缓变的。对 Vlasov 方程做平均即得

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_0 + \frac{q}{m} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{q}{m} \left\langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_1) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle. \quad (1.62)$$

将方程 (1.61) 减去方程 (1.62) 得到扰动分布函数遵从的方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 + \frac{q}{m} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_1) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = \\ \frac{q}{m} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_1) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} - \frac{q}{m} \left\langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_1) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.63)$$

方程 (1.63) 左边是一阶起伏（线性作用），右边是二阶起伏（非线性作用），由波-波相互作用产生。在处理波和粒子相互作用过程中，如果忽略方程 (1.63) 右边波-波相互作用，则得

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 + \frac{q}{m} (\mathbf{E}_0 + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_1) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.64)$$

将方程 (1.62) 与 (1.64) 联立麦克斯韦方程，即可同时解出 f_0 与 f_1 。上述处理相当于在数学上只考虑波对未扰动分布函数的影响和对扰动分布函数的线性影响，而忽略波对扰动分布函数的非线性作用，这种处理方法被称为“准线性理论”。在研究有背景磁场环境下波和粒子共振过程，准线性理论有如下基本假设

- 1) 等离子体的扰动幅度与波动振幅足够小，扰动量的非线性效应可以忽略，各种波模之间不相互耦合，它们对分布函数的效应可以线性叠加。
- 2) 波动的有效频谱足够密，即空间中存在着大量的、频率相近且连续、相位随机的非相干波动，使得波和粒子的相互作用是随机的，而不会产生相位捕获等效应。
- 3) 波动的增长或耗散率比波动频率的实部小，因而等离子体分布函数和电磁场可做系综平均并有物理意义。
- 4) 波粒相互作用时间尺度显著比波动周期长，或者波粒相互作用的空间长度显著长于平行波长，即波场在平行于磁力线方向可传播足够多的波长，从而波和粒子只通过共振交换能量与动量，非共振的效应平均为零。

在满足上述情况下，大量粒子在共振作用下的统计随机结果可以用准线性扩散理论来描述。然而，大振幅波动对高能电子有很强的非线性作用。此外，某些等离子体波动沿磁力线传播的距离有限，与电子的相互作用还有瞬态散射效应，也超越了准线性理论的假设范围。这些情况都导致传统的波粒相互作用准线性理论有很大局限性，因此有必要用试验粒子方法模拟这种波粒相互作用。本论文将在第三章，在前人基础上进一步发展试验粒子模拟方法，并将这种试验粒子模拟方法应用于本论文的主要工作——磁声波与电子相互作用的模拟中。

1.3 内磁层中的波动

在太阳活动所引起的太阳风活动变化时，辐射带的电子通量可在一天时间里变化数个量级。这些电子的加速、损失、扩散与输运，受内磁层中等离子体波动与电子相互作用的影响。图 1.5 显示的是内磁层中各种波动的空间分布示意图^[6]。其中超低频波（Ultra-Low Frequency wave）在整个磁层都有分布，甚至也可以在地面上测量到，因此没有在图中示意。在环电流电子漂移区（主要在夜侧、晨侧与日侧）的等离

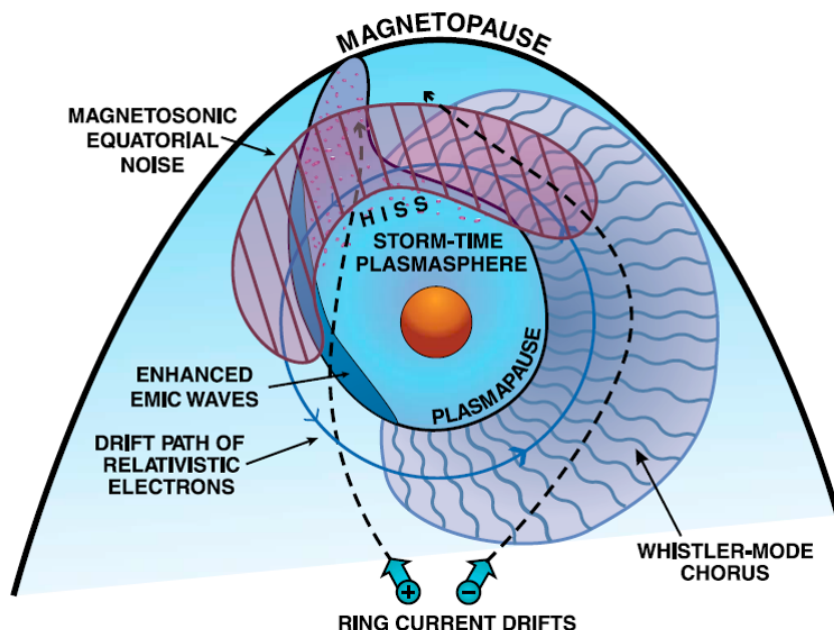


图 1.5 内磁层中的等离子体波动的空间分布，及波动与等离子体层的关系^[6]。环电流电子（10-100 keV）与离子的漂移轨迹在图中用虚线标示，以及相对论电子（ ≥ 0.3 MeV）的轨迹在图中用蓝色线标示，箭头方向代表漂移运动的方向。

子体层外，广泛分布着哨声模合声波。在等离子体层内，分布着嘶声（Hiss）。在等离子体层的plume区附近，分布着电磁离子回旋波（Electromagnetic ion cyclotron wave, EMIC）。此外在等离子体层内外的宽广空间，都分布着磁声波（Magnetosonic wave, MS wave），由于它被约束在磁赤道附近，因此也叫赤道噪声（Equatorial noises）。由于磁声波是本论文的研究对象，我们将在下一节详细介绍。

1.3.1 超低频波

超低频波也叫地磁脉动，一百多年前，人们就通过地磁数据记录到超低频波。超低频波的周期范围约在 0.2-600 s 范围^[7]。超低频的激发主要来自太阳风扰动^[8,9]和磁层内等离子体体不稳定性^[10,11]。

超低频波可以通过离子漂移——弹跳共振加速离子，其条件是

$$\omega - m\omega_d = N\omega_b, \quad (1.65)$$

这里 m 代表方位表波数， N 代表谐波阶数。图(1.6)显示的是极型（poloidal mode）超低频波通过 $N = \pm 2$ 共振加速离子的示意图。离子在漂移方向所感受到的多谱勒频移频率是其弹跳频率的 2 倍，图中红色轨迹所代表的离子总是经历强的加速与弱的减

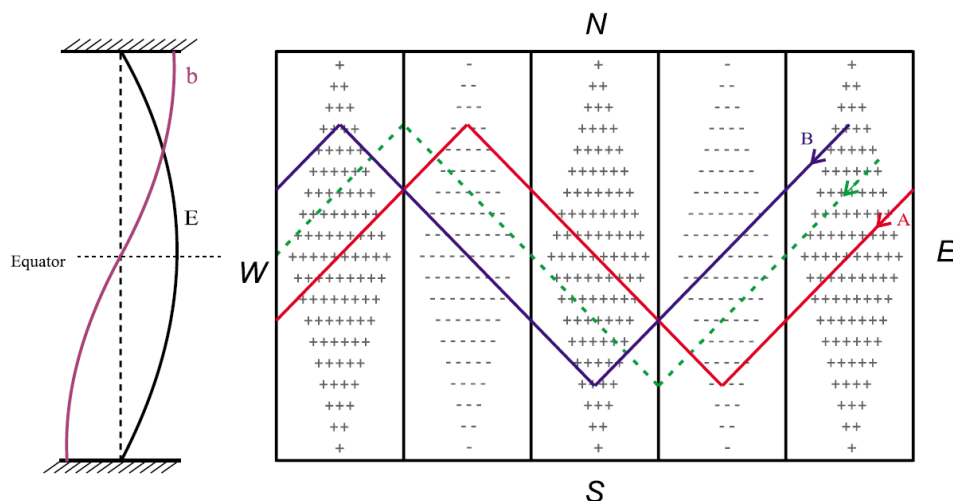


图 1.6 极型模超低频波与离子的漂移-弹跳共振示意图^[12]。(左侧)基波中磁场与电场随磁力线的分布,两端为电离层。(右)离子在随波一起运动的坐标系中的运动轨迹。正(负)号代表西(东)向超低频波电场。红线代表的离子在西向漂移时,总是经历较强的加速与较弱的减速,因而总能量增加。

速,因此总体上粒子被超低频波加速。蓝色线代表的离子则受到减速。

超低频波除了可以加速磁层中的离子,也可加速电子。超低频波对电子的加速的直接证据也被 CLUSTER 四颗卫星在 2004 年 11 月 7 日观测^[9]。如图 (1.7) 所示,当激波来临时,四颗卫星都观测到能量在 68-94 keV 之间的电子通量的快速增加。此外,起初只有 90° 投掷角附近的电子得到加速,且通量随超低频波的电场调制。20 分钟后,这些电子在所有投掷角上的通量都增加。最新的范阿伦卫星也观测到,超低频波可对 37-221 keV 电子都有调制作用^[13]。

由于超低频波频率远低于电子回旋频率,它不能改变高能电子的第一绝热不变量,但是可以通过改变第三绝热不变量,使电子径向扩散。由于保持第一绝热不变量守恒,当粒子在超低频波作用下径向向内扩散时,能量升高。由超低频波引起的径向扩散被认为是电子加速的重要来源^[14-16]。

1.3.2 合声波

合声波通常是由一组快速的、连续上升调的分立谱组成的,分立谱一般持续约 1/10 秒钟。这些上升调在声频中就像早晨的鸟儿合唱,因而得名。图 (1.8) 展示的是 CLUSTER 四颗卫星在 2002 年 4 月 18 日观测到的合声波功率谱密度。可见合声波被 $1/2f_{ce}$ 频率分隔为上带与下带。上带与下带都是由上升调的分立波包组成,每一个波包的功率谱密度从指数增长相开始,达到饱和强度后指数衰减。波包的间隔时间长度比较随机,从数毫秒至数十毫秒不等。

最近的研究表明,合声波既可以是上升调,也可以是下降调。通过统计 THEMIS

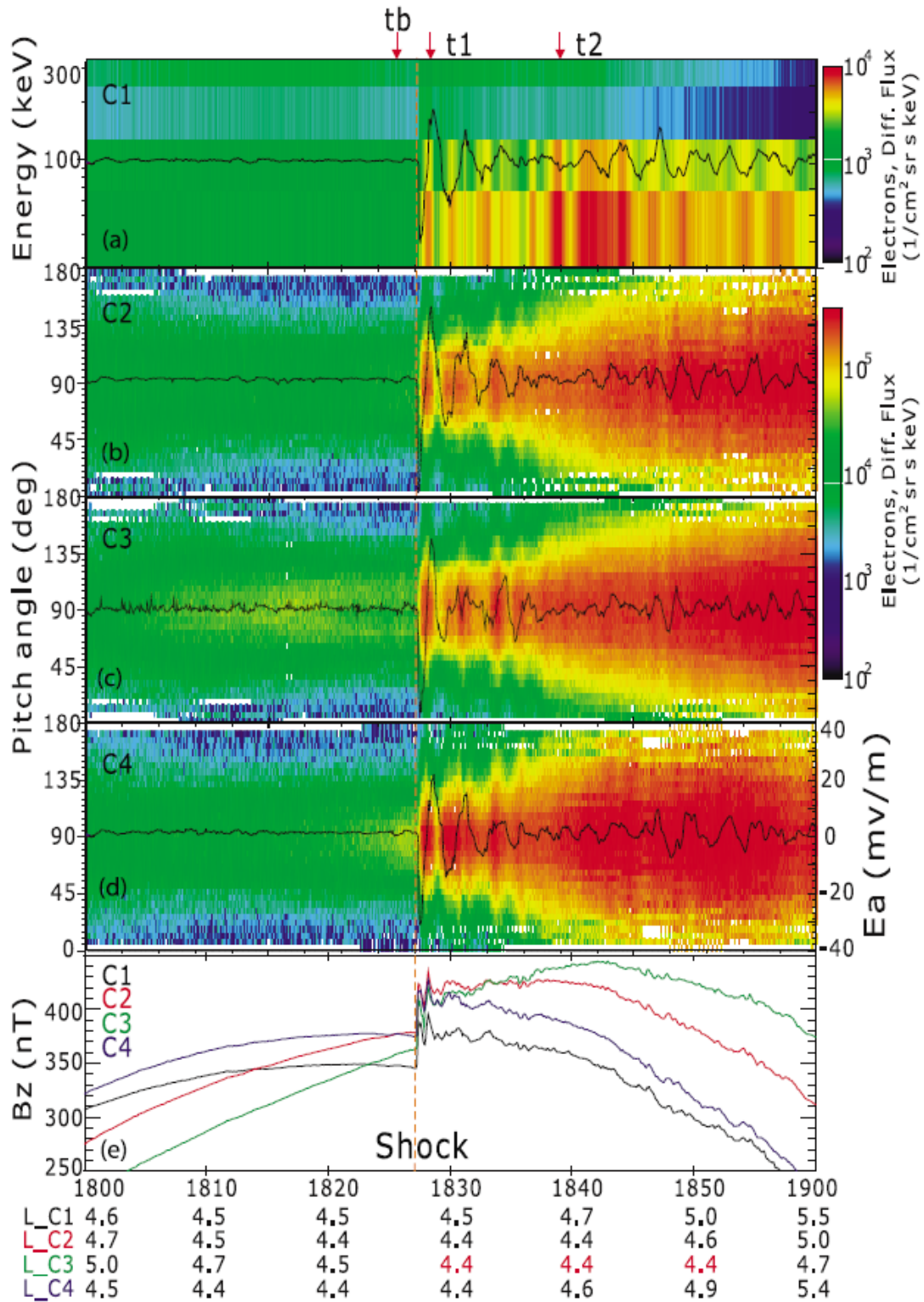


图 1.7 CLUSTER 四颗卫星观测到的超低频波加速 ~ 100 keV 电子示意图^[9]。(a) C1 卫星探测的高能电子谱。(b-d) C2, C3 与 C4 卫星所观测到的 68-94 keV 电子投掷角分布动态变化图。(e) 四颗卫星所观测到的 B_z 分量。图中电场 E_a 的正方向是东向。

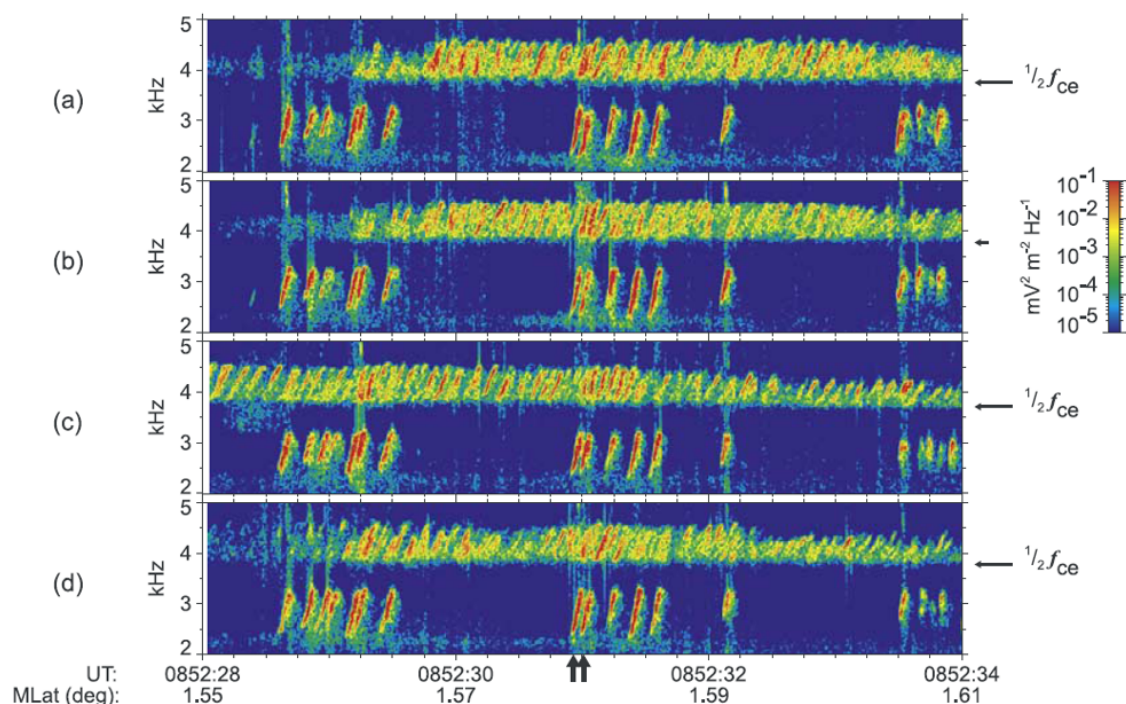


图 1.8 2002 年 4 月 18 日, CLUSTER 四颗卫星上的 WBD 仪器测量的电场功率谱密度^[17]。图 a-d 分别代表 C1-C4 卫星的观测。

A, D 与 E 三颗卫星在 2008 年间观测到的 598 组合声波, Taubenschuss 等人发现, 84% 的合声波为上升调, 16% 为下降调^[18]。图 1.9 展示的是 THEMIS E 卫星观测到的典型上降调 (左) 与下降调 (右) 合声波, 及其波动传播角、椭圆极化率、极化度等特性^[19]。典型的上升调合声波为沿磁力线传播, 并且是接近圆极化的右旋波。下降调的合声波也是圆极化波, 但传播角比较大。最新的范阿伦卫星也观测到合声波的精细结构^[20]。

合声波由环电流 $\sim 10\text{-}100\text{ keV}$ 电子的各向异性激发。CRESS 卫星在 1991 年 3 月 13 日的观测表明, 当磁层注入各向异性的 ($T_{\perp} > T_{\parallel}$) $\sim 10\text{-}100\text{ keV}$ 电子时, 下带合声波强度得到显著增强^[21]。上升调的分立合声波被认为很有可能是非线性波粒相互作用激发的^[22-26]。

合声波在内磁层中的作用包括两个方面: 散射低能量的电子到损失锥从而使之沉降损失到大气中; 加速辐射带电子至 MeV 能量。Nishimura 等人通过 THEMIS 卫星与地面全天向影像 (all-sky imager, ASI) 的联合观测, 找到下带合声波驱动脉动极光的直接证据^[27]。图 1.10C 展示了格陵兰的 Narsarsuaq 全天候影像在 4 个时刻观测的分立极光图像, 其中红色箭头所指为脉冲极光。图 1.10B 给出了 THEMIS-A 卫星观测到的分立合声波。图 1.10D 给出了下带合声波强度与极光强度随时间的变化, 两者相关系数达 0.88, 可见下带合声波的增强与脉动极光的活动密切相关。

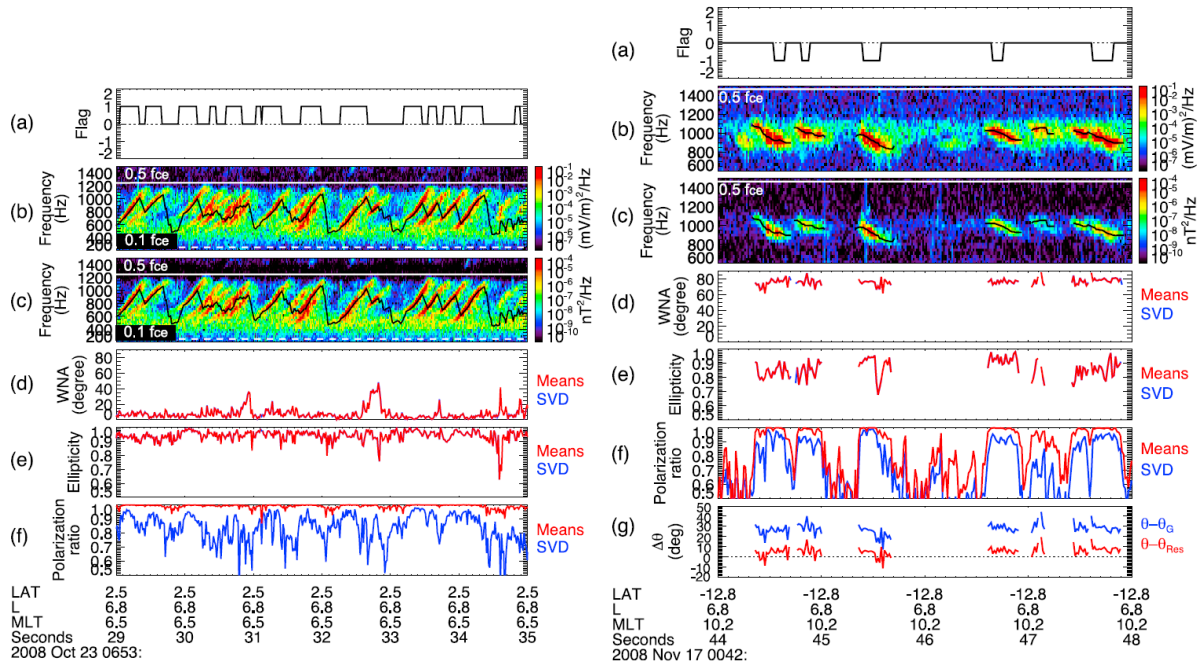


图 1.9 左：THEMIS E 卫星在 2008 年 10 月 23 日观测的典型上升调合声波及其特性^[19]。a，上升调(+1)与下降调(-1)的标志。b，电场波动功率谱密度；c，磁场波动功率谱密度；d，波动的传播角；e，波动的椭圆极化率；f，波动的极化度。右：2008 年 11 月 17 日观测到的下降调合声波及其特性。a-f，与左图类似；g，波动传播角与 Gendrin 角之差（蓝），以及传播角与共振锥角之差（红）。

合声波同时也是外辐射带局地加速相对论电子的主要来源。Reeves 等人通过两颗范阿伦卫星的联合观测，发现相对论电子是在外辐射带的中心被局地加速，而不是通过径向扩散加速起来的^[28]。Thorne 等人观测到，在 2010 年 10 月 8-10 日的磁暴期间，范阿伦卫星观测到 MeV 电子的微分通量在一天时间里增强几个数量级，在电子加速的同时卫星观测到很强的合声波^[29]。通过准线性理论与二维福克-普郎克扩散模拟，他们模拟出在合声波作用下，不同能量、投掷角电子的相空间密度的变化，模拟的结果与观测一致的。合声波可高效地加速地球外辐射带的相对论电子，并对木星、土星等磁化星球的电子加速有重要作用^[29]。

1.3.3 嘶声

嘶声是在等离子体层内高密度区的电磁波，也叫等离子体层嘶声，其频率一般在 $\sim 100\text{-}2000\text{ kHz}$ 范围内^[30]。最近的范阿伦卫星也观测到非常罕见的很低频率的嘶声，其频率下限达 $\sim 20\text{ Hz}$ ^[31]。嘶声是宽频的、非相干的、没有结构的波动，所以被称为嘶声。嘶声广泛分布在所有的 MLT，在日侧达最强，并且在磁暴时期增强^[30]。

嘶声曾被认为是起源于闪电。但闪电多发生在陆地上空，而统计表明嘶声的强度与地貌无关。此外，嘶声在磁暴期间增加。Bortnik 等人通过射线追踪模拟，提出嘶声

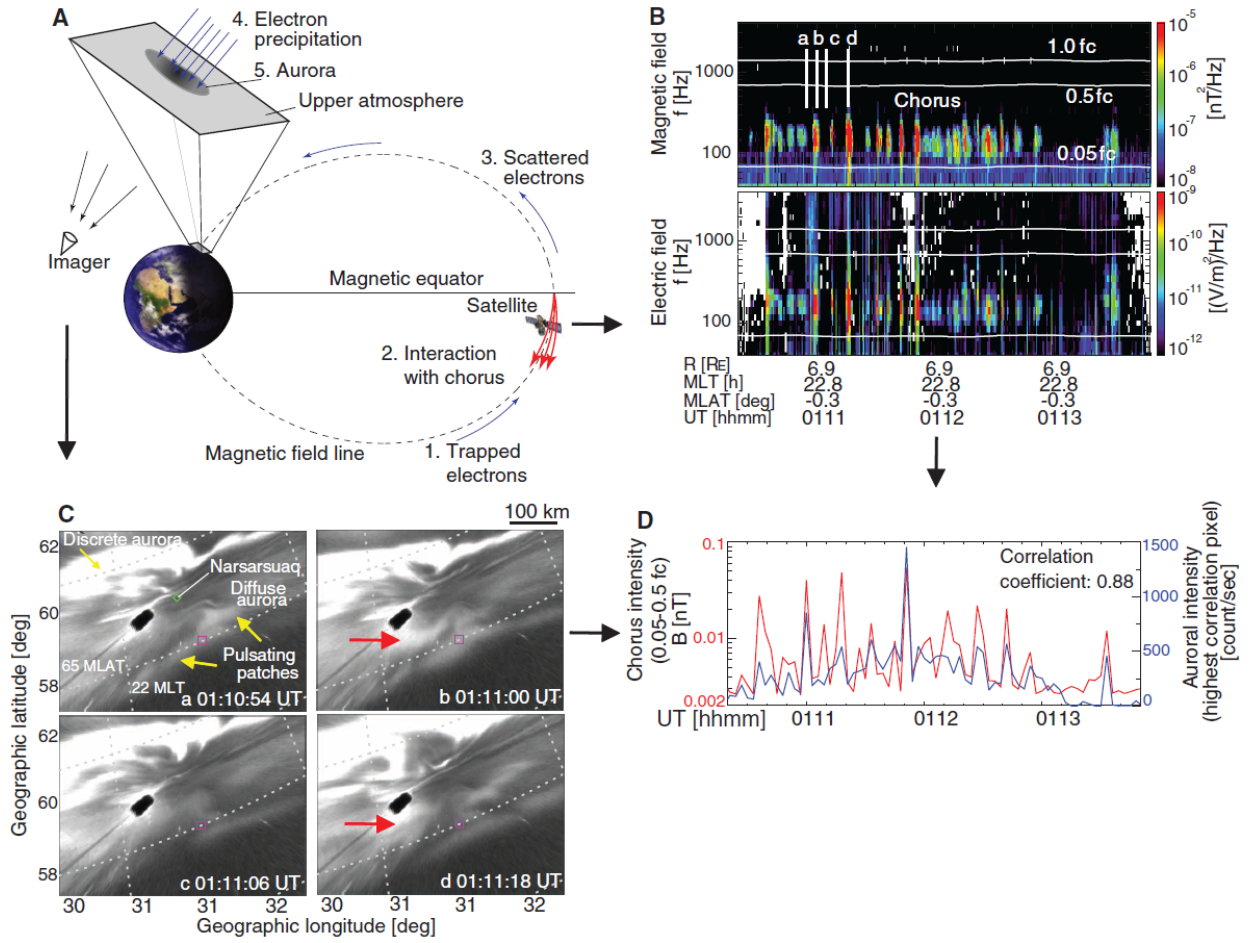


图 1.10 在2009年2月15日01:10:20 UT至01:13:50 UT期间，格陵兰 Narsarsuaq 的全天候影像与 THEMIS-A 卫星联合观测极光与合声波活动的示意图^[27]。(A) 合声波传播方向（红色箭头），电子沉降方向（蓝色箭头）与脉动极光观测示意图。(B) THEMIS-A 卫星观测到的下带合声波的磁场与电场波动功率谱。(C) 全天影像观测投射到 110 公里高的图像。(D) 下带合声波强度（红色）与极光强度（蓝色）的相关性。

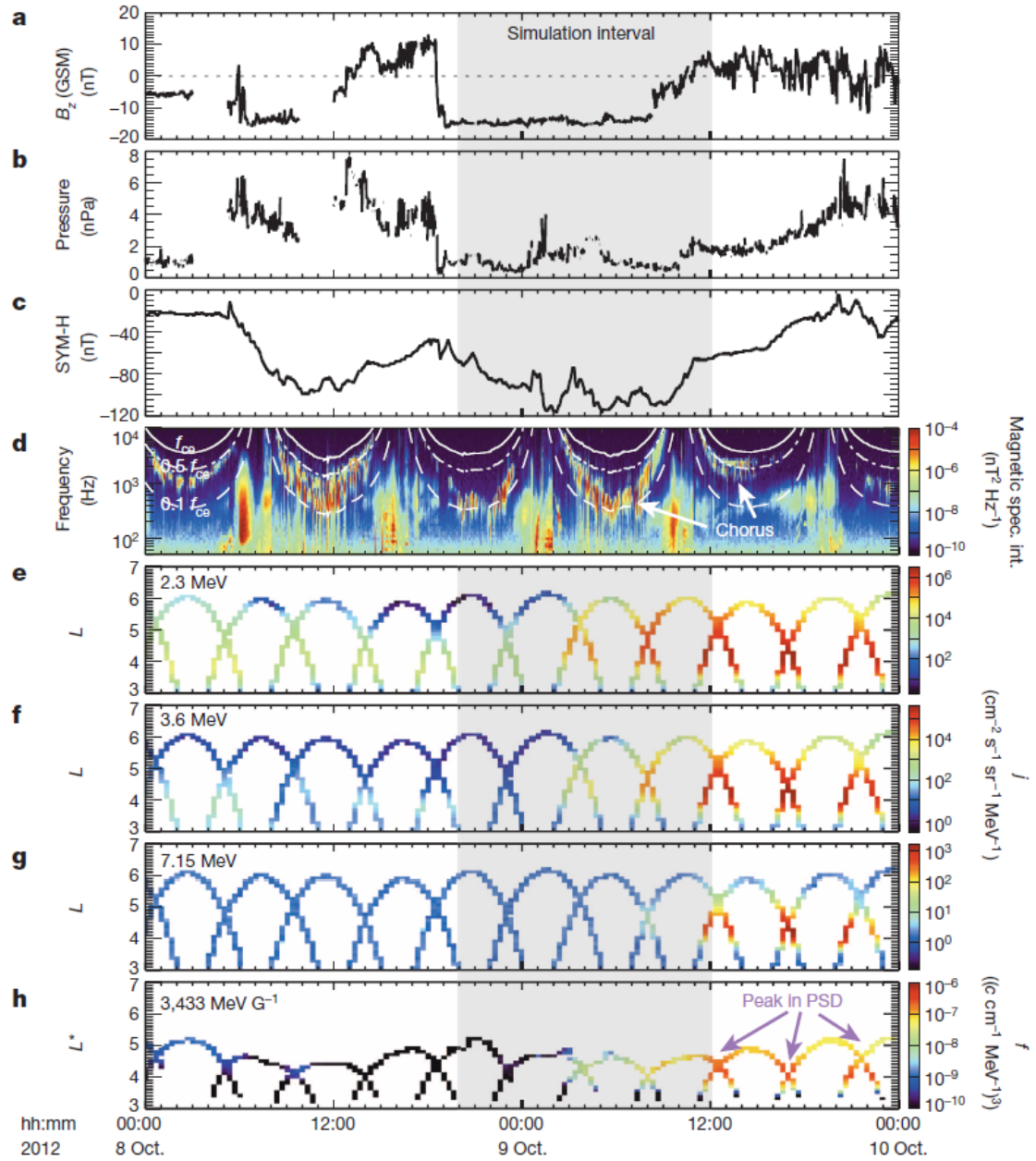


图 1.11 2012 年 10 月合声波加速相对论电子的观测^[29]。(a) 太阳风 B_z 分量大小；(b) 太阳风动压；(c) Sym-H 指数；(d) 范阿伦 A 卫星上的 EMFISIS 仪器观测记录到的合声波磁场功率谱；(e-g) 范阿伦 A 卫星上 REPT 仪器观测到的相对论电子的微分通量变化 (e, 2.3 MeV; f, 3.6 MeV; g, 7.15 MeV)；(h) 第一绝热不变量为 $3,433 \text{ MeV G}^{-1}$ 的电子的微分通量。

是由于合声波传播进入等离子体层后并汇合形成的^[32]。这种模型可解释嘶声在观测上的频带范围、非相干属性、强度的日夜不对称性等特性，以及它与太阳活动的相关性。图 1.12 演示了合声波传播进入等离子体层形成嘶声的示意图。

合声波传播进等离子体层形成嘶声的理论得到了观测上的证实。2008 年 10 月 4 日，THEMIS E 卫星在等离子体层外观测到合声波活动。与此同时，D 卫星观测到等离子体层嘶声。两种波动的平均谱强度具有很高相关性，如图 1.13 所示。因此嘶声的起源与合声波是密切相关的^[33]。

嘶声是地球内外辐射带中间的槽区形成的主要原因。它可以通过与电子回旋共振，快速沉降等离子体层内高能电子，从而减少高能电子辐射对卫星的潜在危害。最近，Li 等人分析了范阿伦卫星与低轨道的 Polar Orbiting Environmental Satellite (POES) 卫星联合观测数据^[34]。他们依据范阿伦卫星观测到的嘶声，用准线性理论计算嘶声所造成的沉降电子与捕获粒子的比例，并与 POES 卫星两个轴向粒子探测器的直接观测对比，两个结果比较吻合，从而从观测上证实了嘶声是沉降高能电子的来源。

1.3.4 电磁离子回旋波

电磁离子回旋波(electromagnetic ion cyclotron, EMIC)是低频波动 (0.1-5 Hz)，它具有离子回旋频率的谐波结构，通常可分为氢 (H) 带与氦 (He) 带等^[35]。EMIC 波的群速度非常接近背景磁力线方向，使得波动可传播至地面，在地面以 Pc1 和 Pc2 形式被观测到^[36]。

图 1.14 展示的是 GEOS 卫星在 2007 年 10 月 13 日观测到的电磁离子回旋波^[37]。图 a-c 分别为在径向、东西向以及场向方向三个分量的功率谱密度，可见电磁离子回旋波的磁场主要在垂直平面上。图中两条白色线分别代表局地氦离子回旋频率 Ω_{He+} 与氧离子回旋频率 Ω_{O+} ，这个事件的电磁离子回旋波频率在 Ω_{He+} 与 Ω_{O+} 之间，是一个氦带波动。

EMIC 波在磁暴期间活动增强，它由环电流中等能量离子 (1-100 keV) 在磁暴和亚暴期间注入过程中各向异性 (垂直温度 > 平行温度) 激发。EMIC 的激发增长区域包括：环电流和等离子体层的交叠区，日侧外流的 plume 区，以及与太阳风动压湍动相关的日侧外磁层区^[6]。全球 EMIC 波动激发模拟证实，等离子体层顶和 plume 区是激发 EMIC 波的回旋共振不稳定性的区域，同时模拟还显示 plume 区等离子体密度的扰动也可激发 EMIC 波动^[38,39]。

磁层中的 EMIC 波主要有两大作用。一是可以通过与环电流质子相互作用，沉降 plume 区的质子，形成 sub-arroal proton arcs^[40]。二是通过与 MeV 电子回旋共振，将这些电子散射至损失锥从而沉降到大气层中^[41-44]。EMIC 波被认为是磁暴主相期间沉

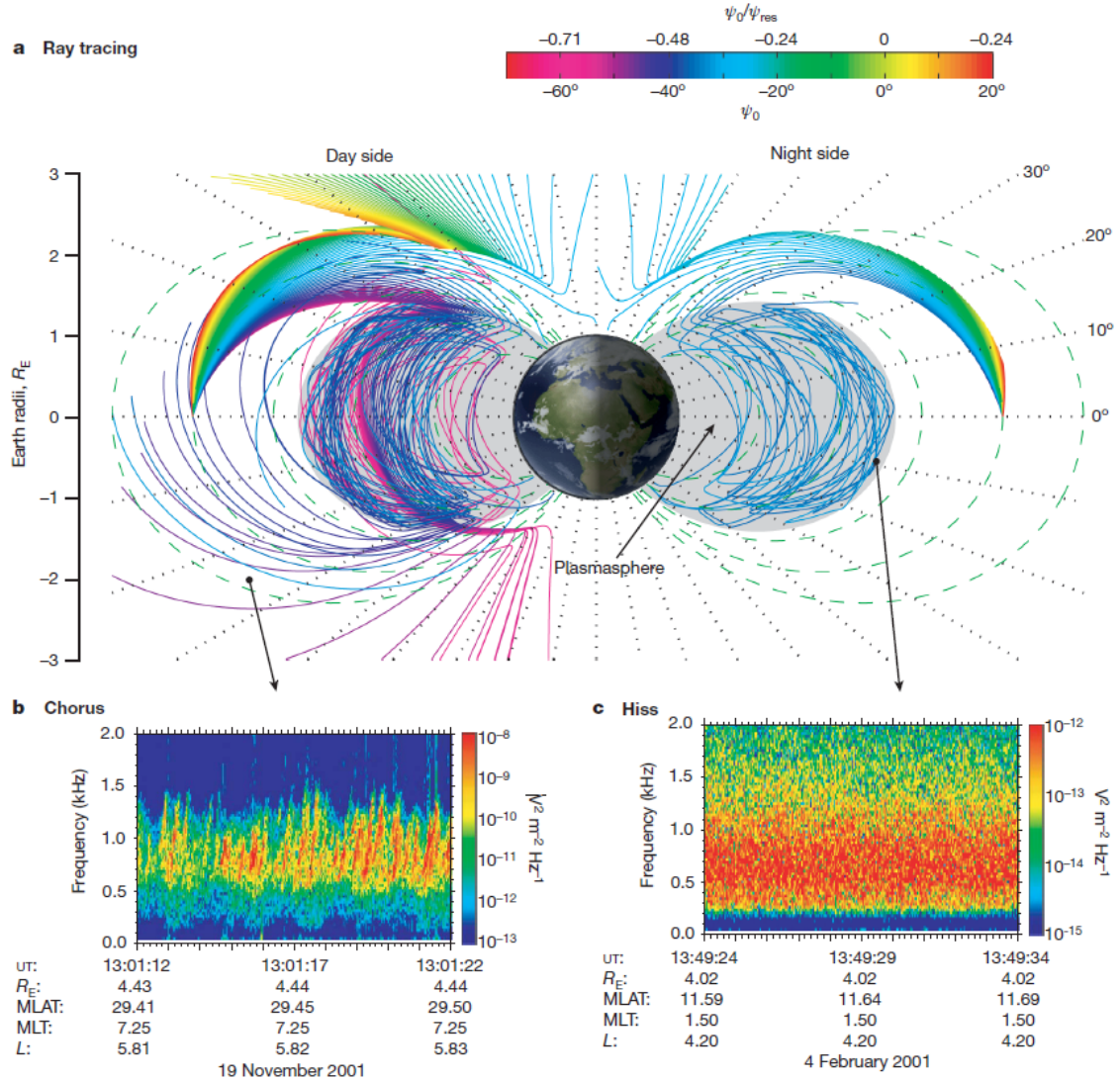


图 1.12 合声波转化成嘶声示意图^[32]。(a) 近地空间里，电磁波射线追踪示意图。图中灰色区域为致密的等离子体层的典型区域。一束具有不同传播角的合声从等离子体层外出发，可传播至等离子体层内。不同频率和传播角的波动在等离子体层内汇合，因而形成不相干的嘶声。(b) CLUSTER 卫星观测到的典型的上升调合声波电场频谱。(c) 典型的嘶声电场频谱观测。

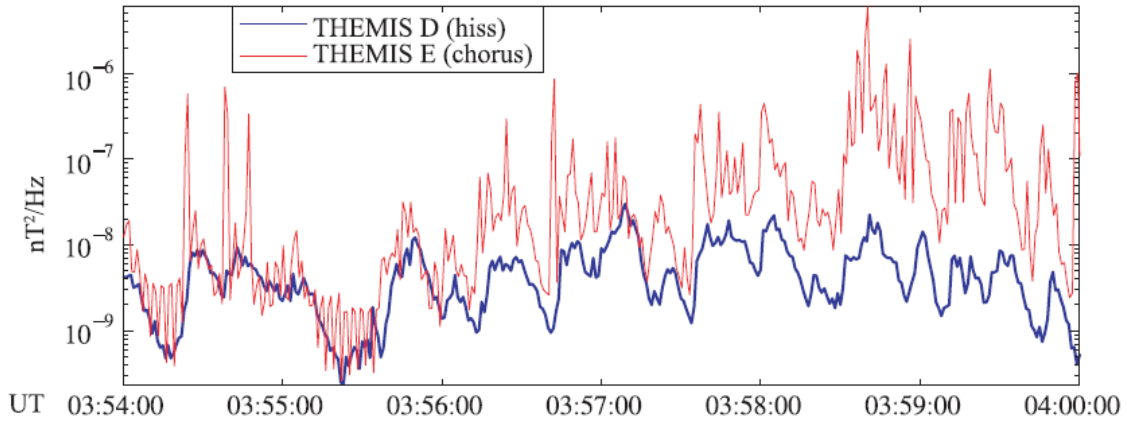


图 1.13 合声波与嘶声活动的相关性^[fig:hiss_Bortnik_2009]。波动数据来自 2008 年 10 月 4 日 THEMIS E 卫星与 D 卫星的联合观测。E 卫星所观测的合声波与 D 卫星所观测的嘶声强度具有很高相关性。

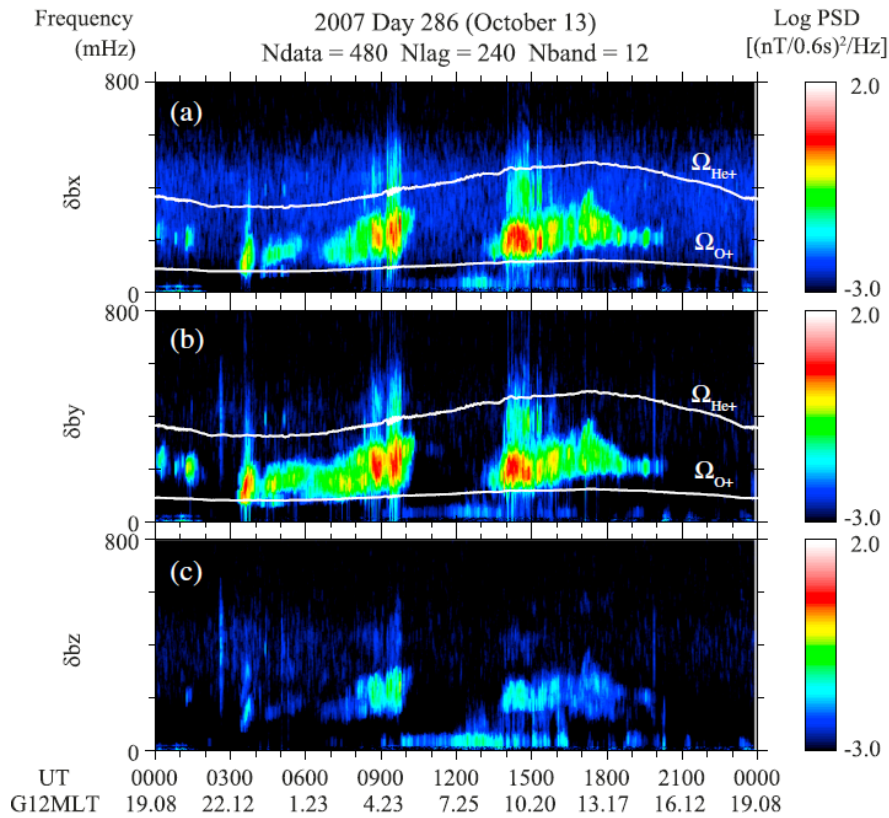


图 1.14 GOES 12 卫星在 2007 年 10 月 13 日观测到的电磁离子回旋波^[37]。(a-c) 分别为在径向、东西向以及场向方向三个分量的功率谱密度。图中两条白色线分别代表局地氦离子回旋频率 Ω_{He^+} 与氧离子回旋频率 Ω_{O^+} 。

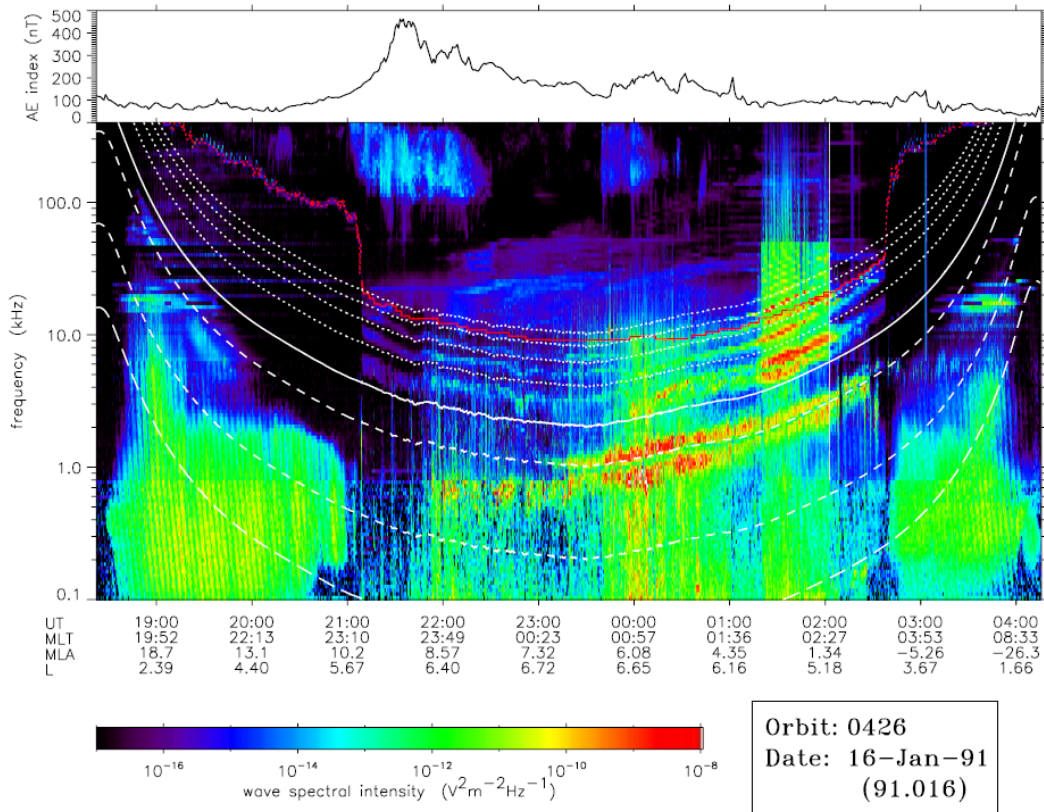


图 1.15 CRESS 卫星在 1991 年 1 月 16 日观测到的电磁波动及 AE 指数^[45]。图中白色实线为电子回旋频率 f_{ce} ，在 f_{ce} 之上的白色点线为 f_{ce} 的前 4 个谐波，谐波之间的波动为电子静电回旋波，在 f_{ce} 之下的白色虚线分别代表 $0.5f_{ce}$ 与 $0.1f_{ce}$ ，被 $0.5f_{ce}$ 分成上下带的波动分别为上带与下带合声波。红色实线代表高混杂波频率 f_{UHR} 。

降 MeV 高能电子的主要来源^[6]。

1.3.5 电子静电回旋波

电子静电回旋波(Electrostatic Electron Cyclotron Harmonic Waves, ECH Waves)是静电波，频率在电子回旋频率的谐波之间^[45]。图 1.15 为 CRESS 卫星在 1991 年 1 月 16 日观测到的电子回旋静电波与合声波^[45]。图中白色实线为电子回旋频率 f_{ce} ，在 f_{ce} 之上的白色点线为 f_{ce} 的前 4 个谐波，谐波之间的波动为电子静电回旋波。这个事件中，还同时观测到上带与下带合声波，分别在 $0.5f_{ce}$ 线上边与下边。

电子静电回旋波是由注入的等离子体片电子的损失锥不稳定性激发的。ECH 波的全局分布及其与磁暴活动的关系，与合声波相似^[45]。电子静电回旋波可与等离子体片的电子发生共振，从而形成弥散极光，它对弥散极光的形成的贡献与合声波相当^[46,47]。

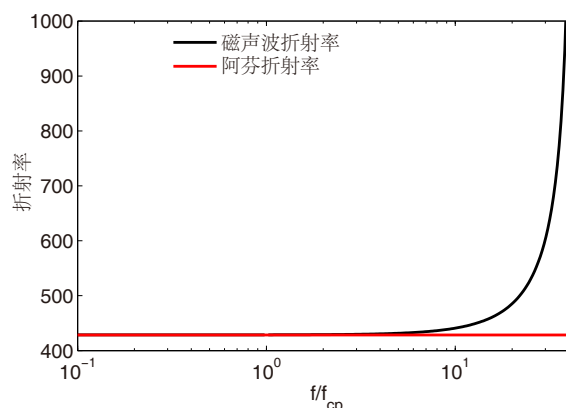


图 1.16 磁层中快磁声波的折射率与频率的关系。等离子体背景为 $f_{pe}/f_{ce} = 10$ 。图中色散关系拓展到了离子回旋频率以下。

1.4 磁层快磁声波

本论文研究的磁声波是磁层快磁声波，指激发频率在离子回旋频率以上、低混杂波频率以下的电磁波动 ($f_{cp} < f < f_{LHR}$)。这与磁流体力学的磁声波不同，它为离子回旋频率以下的波动 ($f < f_{cp}$)。由于磁层快磁声波被约束在磁赤道附近，起初也叫赤道噪声 (equatorial noises) [48–50]，以下我们简称磁层快磁声波为磁声波。磁声波具有垂直于磁力线传播、接近线性极化等特性，并具有谐波结构，以及上升调精细结构。

1.4.1 磁声波的冷等离子体色散关系

我们首先给出磁层快磁声波的冷等离子体色散关系。磁声波在空间中垂直于磁力线传播，我们考察传播角为 90° 的磁声波，代入 $\theta = 90^\circ$ 到色散关系方程 (1.49) 中，对应的 $\pm$ 分别得到两个解

$$n^2 = RL/S \quad \text{和} \quad n^2 = P. \quad (1.66)$$

对于典型的等离子体背景 $f_{pe}/f_{ce} = 10$ ，在磁声波频率范围 P 为负，而 RL/S 为正，故我们取正值，得到磁声波的色散关系 $n = \sqrt{RL/S}$ 。图 (1.16) 显示的是垂直传播的磁声波的色散关系，可见波动折射率随频率升高而增大。这里我们把色散关系拓展到离子回旋频率以下，可见低频磁声波以及离子回旋频率以下垂直传播的电磁波的折射率接近阿芬波折射率 ($n_A = c/v_A = c \sqrt{\mu_0 \rho} / B$)。

1.4.2 磁声波的观测特性

图 1.17 展示的是 THEMIS 卫星在 2011 年 2 月 15 日观测到的磁声波^[51]。由图 1.17a 所示的等离子体密度，可知卫星在 01:45 UT 进入等离子体层内。卫星在等离子

体层内外都观测到磁声波，它们的频率位于低混杂波 f_{LHR} （白色线）频率以下，质子回旋频率 f_{cp} 以上（未标示）。由于垂直传播与线性极化特性，磁声波的垂直电场显著大于平行电场，平行磁场显著大于垂直磁场（图1.17d-g）。在等离子体层外的磁声波伴随有质子相空间分布的正梯度（图 1.17c），且波动频率随背景质子回旋频率一致上升，它有可能是局地激发的磁声波。等离子体层内的磁声波在频率上无结构，局地也没有观测到质子相空间分布的正梯度，它有可能是由等离子体层外传播进来形成的。

磁声波在观测中往往具有明显的谐波结构。Perraut 等人利用 GEOS 卫星数据首次报导，局地激发的磁声波是在离子回旋频率的谐波^[53]。CLUSTER 卫星的观测也证实了磁声波的谐波结构。统计表明，磁声波基本被约束在磁赤道附近^[49]。

此外，磁声波还经常呈现上升调结构。从前人们就通过卫星数据观测到合声波与EMIC波具体上升调结构，最近，Fu 等人利用 THEMIS 卫星数据，观测到磁声波也有上升调结构^[54]。范阿伦卫星也观测到大量的上升调磁声波^[55]。

1.4.3 磁声波的激发

磁声波是由环电流质子在速度空间的环状分布所激发。Chen 等人利用 Rice Convection Model 与 Ring Current-Atmospheric Interactions Model，模拟了 2001 年 4 月 22 日的磁暴事件中环电流质子的运动^[56]，如图 1.20 所示。模拟的结果显示，在主相期间，质子分布函数在日侧（MLT 在 12h 左右）呈现环状结构，即分布函数存在正梯度 $\partial f / \partial v_{\perp} > 0$ 。这种分布是不稳定的，它提供了自由能激发磁声波。Chen 等人模拟了不同谐波的磁声波在全球范围的激发，结果显示，低倍谐波的磁声波（ $f < 10f_{cp}$ ）主要在夜侧的等离子体层激发，而高倍谐波（ $f > 20f_{cp}$ ）的磁声波倾主要在晨侧等离子体层外的低密度区激发^[56,57]。

1.4.4 磁声波的传播

磁声波主要分布在磁赤道附近，垂直于磁力线在磁赤道平面传播。在赤道平面内，由于各方向的背景磁场、等离子体分布不相同，导致各方向的折射率不同，因此磁声波沿一定的路径传播。研究磁声波的传播规律，有助于我们了解磁声波在全球的分布。

磁声波在磁层介质中的传播遵循 Snell 折射定理，图 1.21 演示了这个原理。假设赤道介质对地球磁地方时是对称的，即磁场强度与等离子体密度只是径向距离 r 的函数。图中分层面（黑线）内层介质折射率为 n ，外层质折射率为 n' ，蓝色箭头代表在磁声波 b 点以 ψ_b 角入射（ $\psi = 0^\circ$ 代表径向向外传， $\psi = 90^\circ$ 代表向东传播），红色箭

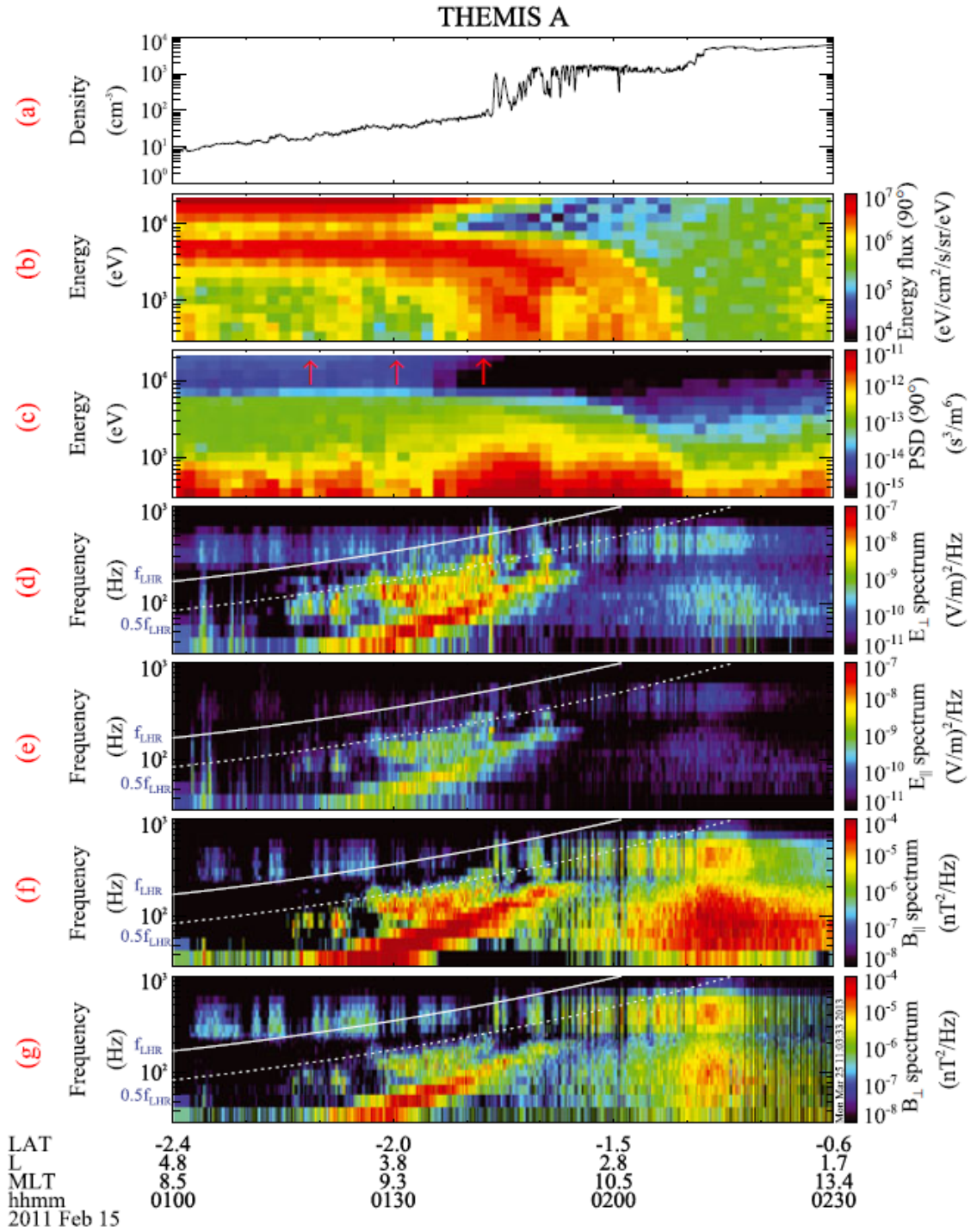


图 1.17 THEMIS 卫星观测磁声波的一个典型事例^[52]，时间为 2011 年 2 月 15 日。a) 背景等离子体密度（由卫星电势所推导）；(b) 约 90° 投掷角离子的能量谱密度；(c) 约 90° 投掷角离子的相空间密度；(d) $E_{\perp}$ 的能谱密度；(e) $E_{\parallel}$ 的能谱密度；(f) $B_{\perp}$ 的能谱密度；(g) $B_{\parallel}$ 的能谱密度。

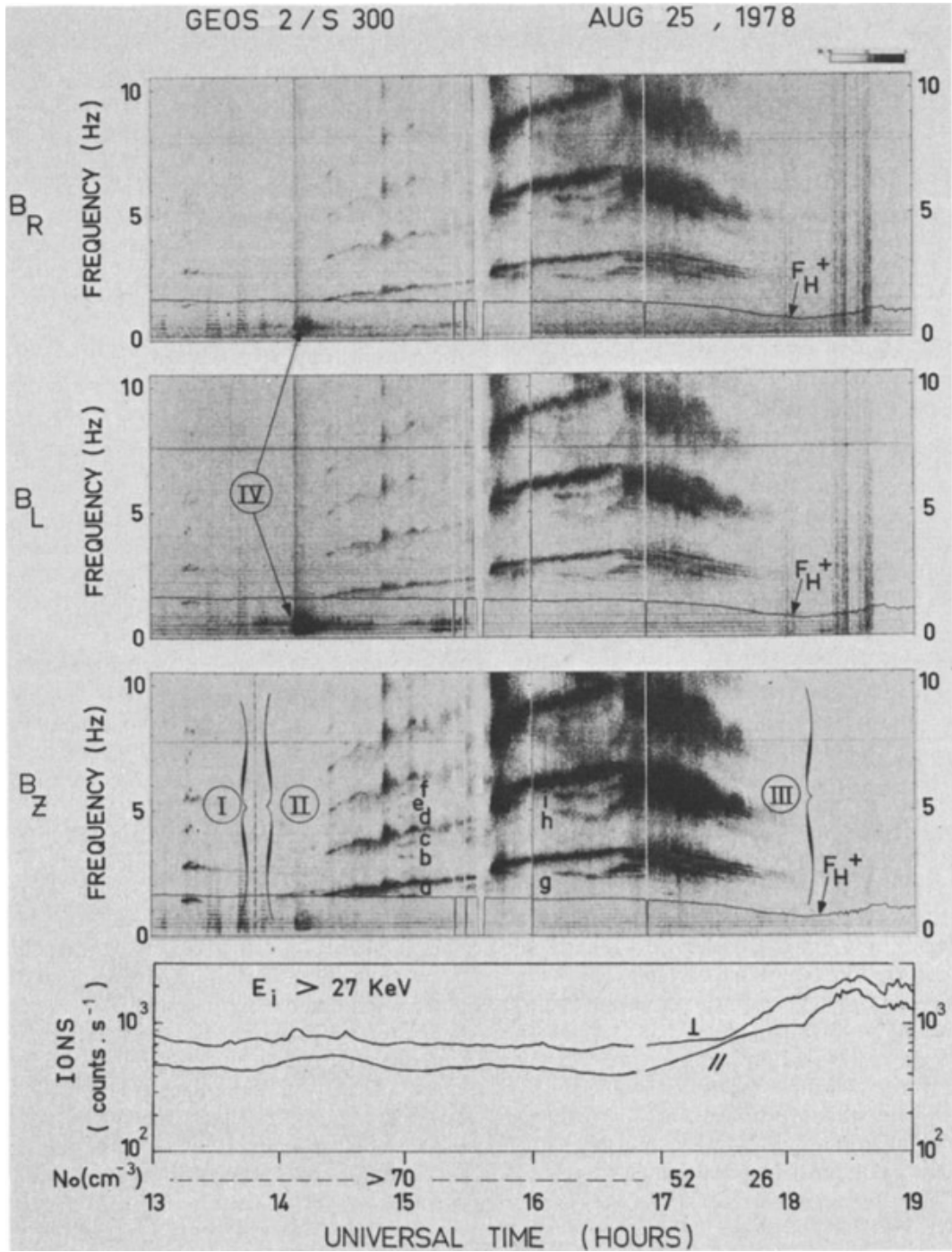


图 1.18 GEOS 卫星所观测到的磁声波的右旋分量、左旋分量与场向分量。最下图显示的是垂直及平行方向的离子计数率^[53]。

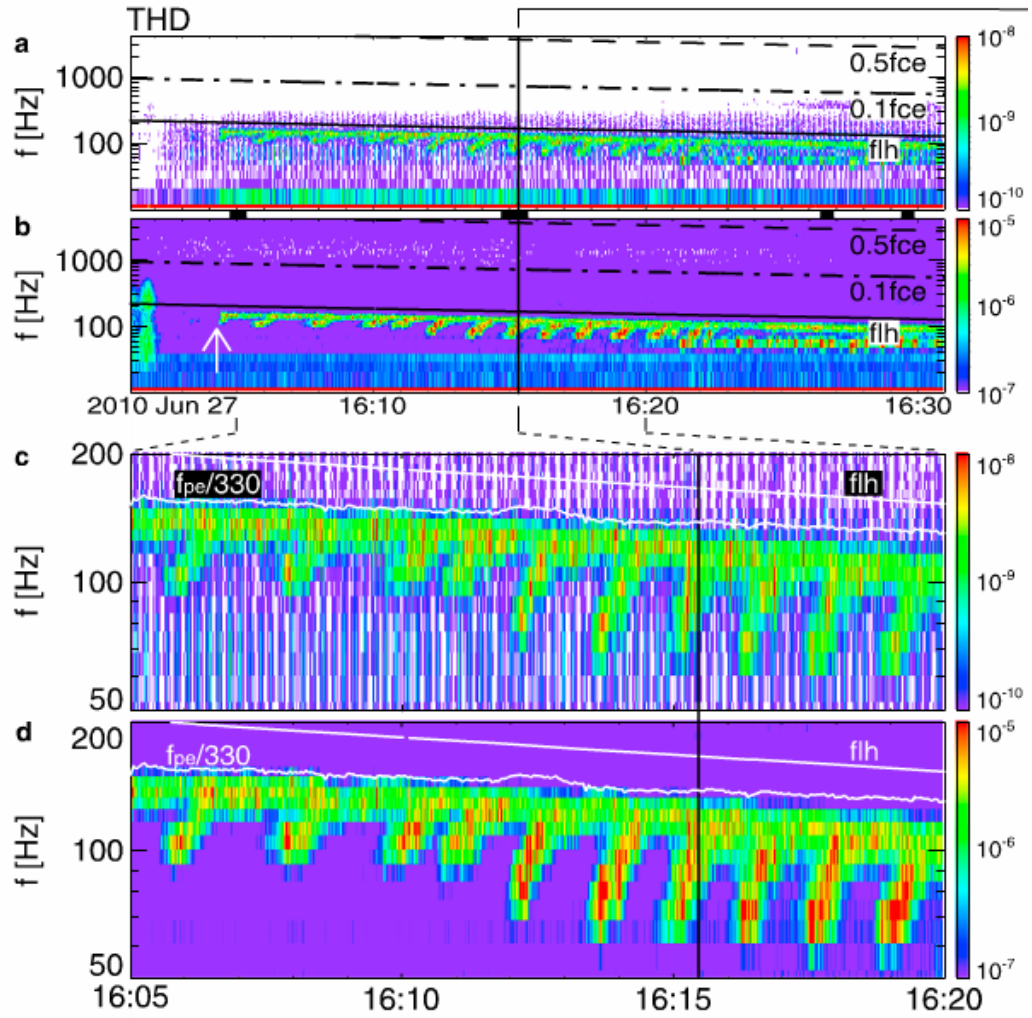


图 1.19 2010 年 6 月 27 日, THEMIS 卫星观测到磁声波的上升调结构^[54]。(a,b) 卫星观测到的 10-4000 Hz 范围的甚低频波的电场与磁场功率谱密度。(c,d) 截取在 50-200 Hz 之间的电场与磁场功率谱密度。这个事件中, 磁声波呈现明显的上升调结构。

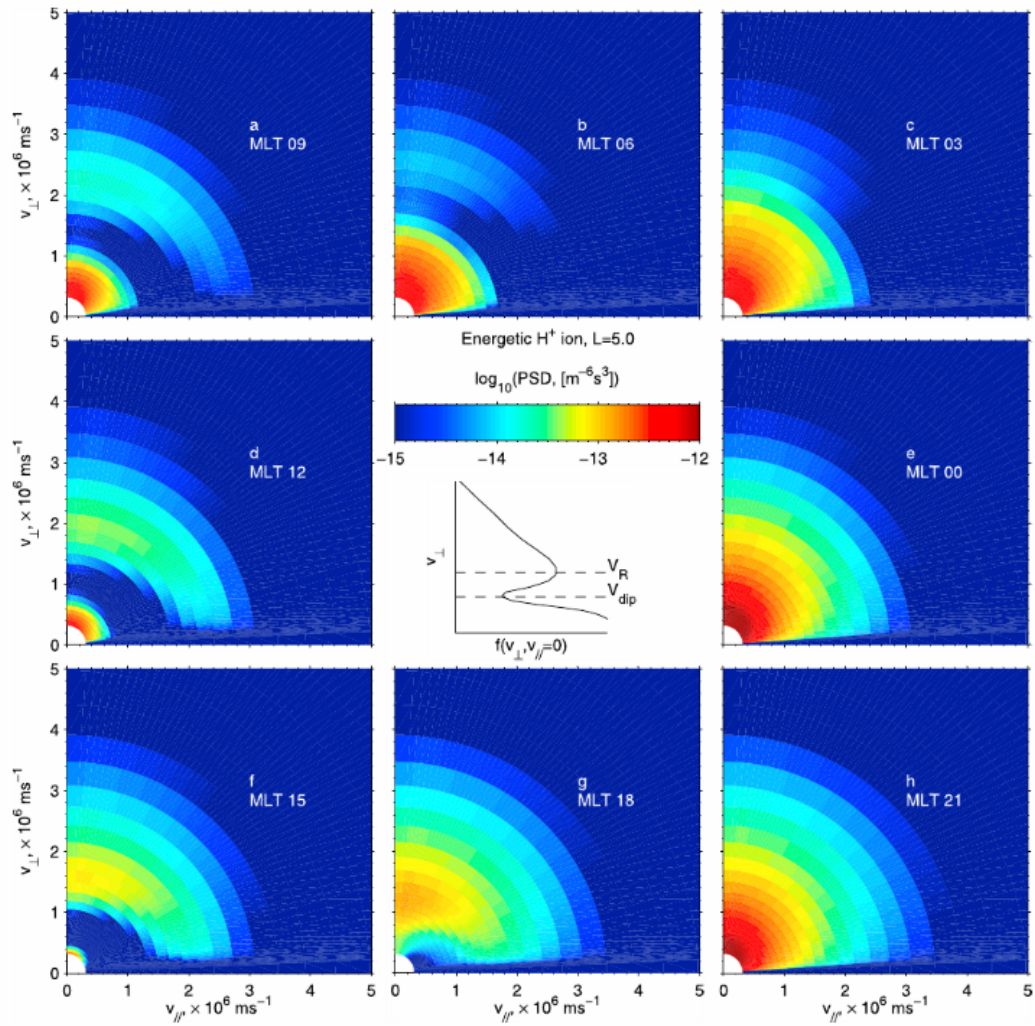


图 1.20 在 $L=5$ 处质子相空间密度分布 $f(v_{\perp}, v_{\parallel})$ 的模拟，在磁地方时每隔 3h 为一幅图。可见质子分布函数在日侧与晨侧都有显明的环结构，即 $\partial f / \partial v_{\perp} > 0$ 。这种不稳定性提供自由能激发磁声波^[56]。

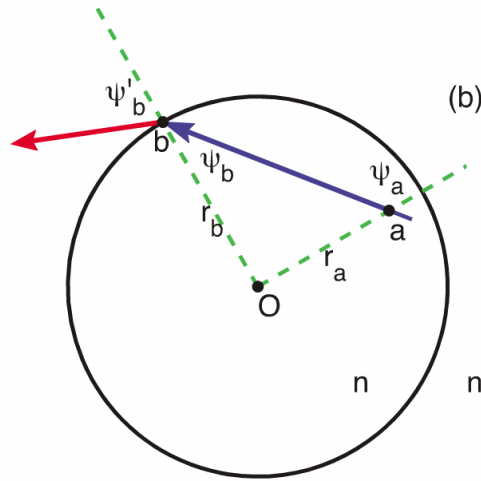


图 1.21 在球层介质中，电磁波动传播的Snell定理示意图^[59]。在分层面（黑线）内层介质折射率为 n ，外层质折射率为 n' ，蓝色箭头代表在磁声波 b 点以 ψ_b 角入射，红色箭头代表磁声波在外层介质以 ψ'_b 角出射。绿色线代表 a, b 两点的径向距离。

头代表磁声波在外层介质以 ψ'_b 角出射。绿色线代表 a, b 两点的径向距离。根据折射定律，磁声波在传播路径中保持 Q 守恒^[58]

$$Q = nr \sin \psi. \quad (1.67)$$

利用 Snell 定理，Chen 等人模拟了磁声波在地球空间里的传播，表明磁声波可以在赤道面附近沿径向、环向传播。由于有等离子体层的存在，磁声波还可在等离子体层内侧被约束在很窄的径向范围^[59]。最近，Ma 等人利用范阿伦卫星的数据，观测到一个磁声波约束在外辐射带某个区域内，不能传播出去。他们依据 Snell 定理模拟这个磁声波的传播范围，与观测的结果非常接近^[52]。

1.4.5 磁声波对电子的作用

电磁波可以通过回旋共振与电子发生强相互作用

$$\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = \frac{n\omega_{ce}}{\gamma}, \quad (1.68)$$

这里 ω 是波动的角频率， $k_{\parallel}$ 是平行波数， $v_{\parallel}$ 是电荷平行速度， $\omega_{ce} = |qB/m|$ 是电荷的非相对论回旋频率， γ 是相对论因子。 n 是共振阶数，其中 $n = 0$ 代表朗道共振， $n = 1$ 代表普通的回旋共振。高能电子一般只能通过朗道共振与典型的磁层快磁声波发生相互作用，因为发生回旋共振往往需要电子能量在 3 MeV 以上^[60]。CLUSTER 3 卫星在 2002 年 11 月 25 日观测到一次强磁声波，频率约为 30 Hz 左右，总振幅为 218

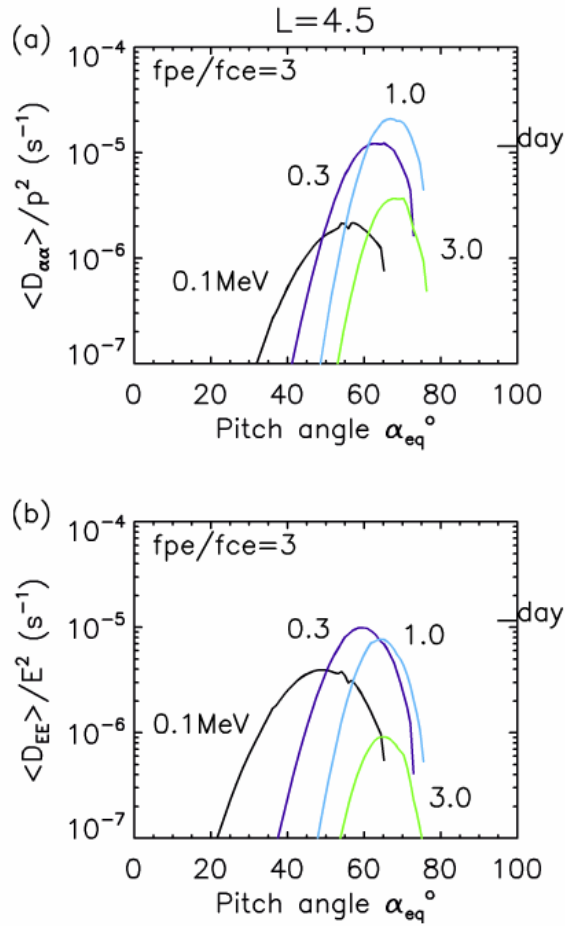


图 1.22 磁声波与一系列不同能量、投掷角的电子相互作用的弹跳平均投掷角扩散系数（上）与能量扩散系数（下）^[60]。

pT. Horne 等人应用准线性理论，计算了这个磁声波在等离子体外与电子朗道共振作用的扩散系数^[60]，图 1.22 分别展示了投掷角扩散系数与能量扩散系数。图 1.22b 可见这个磁声波可在 1 天的时间尺度里对 300-1000 keV 电子进行加速，因此他们认为磁声波可有效地加速辐射带电子，其时间尺度与合声波的作用相当。图 1.22a 可看出，这个磁声波对小投掷角电子不发生相互作用，因而它不会造成电子沉降损失。同时，他们通过模拟还发现，在等离子体层内致密区域，磁声波与 ~ 100 keV 电子相互作用更为快速有效。

然而，由于磁声波垂直于磁力线传播（传播角接近 90° ），并且主要分布在赤道附近，因而它具有较长的平行波长，因而在沿磁力线方向传播的波长数很有限。在上述 CLUSTER 卫星观测的事件中，磁声波沿磁力线传播的波长约为 $\lambda_{\parallel} \approx 2,900$ km，相当于在 $L=4.5$ 处 $\pm 3^\circ$ 纬度范围内仅能传播一个波长。准线性理论的一个基本假设是电磁波沿磁力线可传播足够远，或者相互作用时间远长于波动周期^[61]。然而磁声波对电子

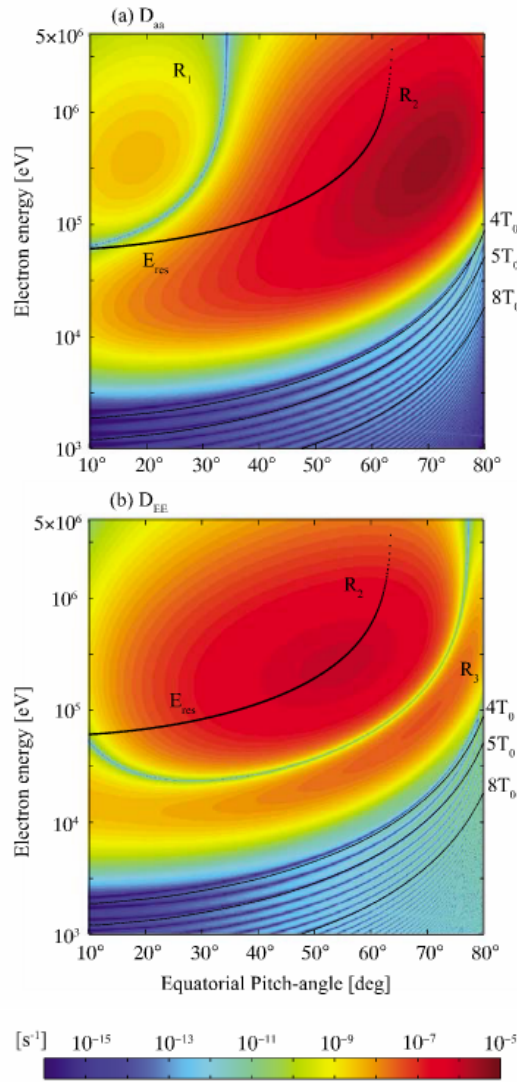


图 1.23 试验粒子模拟的单色磁声波对不同能量、投掷角的电子作用的投掷角扩散系数（上）与能量扩散系数（下）^[62]。

的作用并不满足这个假设，因而在模拟磁声波对电子作用时，准线性理论的适用性有待确定。Bortnik等人采用试验粒子方法，模拟了在这个事件中磁声波对电子影响的扩散系数。为了应用试验粒子模拟方法，他们把波动简化为单色波模型，这个单色磁声波对电子作用的投掷角扩散系数与能量扩散系数如图 1.23a-b 所示。图中黑色曲线代表朗道共振线，只有这条线附近的粒子可与磁声波发生朗道共振。模拟结果表明，在共振线附近，波对粒子作用的扩散系数较大，朗道共振依然起重要作用。但是在朗道共振线以外，波对电子的作用也很强，这是磁声波通过 transit-time 效应散射电子的结果。

Horne 等人^[60]与 Bortnik 等人^[62]的模拟认为，磁声波可有效地加速高能电子。然

而，之后 Shprits 等人^[63]利用准线性理论模拟了太阳活动低年快磁声波对电子的加速与散射效应，认为磁声波对电子的加速效应被高估，即磁声波并不能有效加速高能电子。关于磁声波对辐射带电子的作用尚未得到观测证实，磁声波是否能加速高能电子尚存在争议。

1.5 磁声波研究的重要性

如前所述，过去几十年间，人们对辐射带中各种重要波动进行了大量的观测和广泛的理论研究。本章总结了迄今人们对超低频波、电磁离子回旋波、磁声波、嘶声、合声波、电子静电回旋波的研究成果。按波动的周期大小顺序，这些波动的频率特征、空间分布、激发起源机制、传播特性、极化特性、精细结构及对辐射带的作用总结如表 1.1。

人们关心的最焦点的问题，是这些波动对辐射带高能粒子的作用。超低频波、电磁离子回旋波、嘶声、合声波与电子静电回旋波的作用，现已经形成概念。如前所述，磁声波对辐射带的作用，目前还比较空白，只有初步的研究，并且存在争议。在磁声波作用下，高能电子有什么动态效应，从前既没有观测证据，也没有粒子模拟，因此这正是本论文急待解决的科学问题。基于前面的总结，我们认为磁声波的研究具有下列重要意义与潜在价值：

(1) 磁声波是一种能量传递媒介，它由环电流质子在速度空间环状分布的不稳定性激发，可潜在地通过共振把能量传递给电子。但是磁声波对电子加速、散射效应存在争论。此外，磁声波加速、散射电子的机制与过程，前人描述得含糊不清。因此，本论文需要研究磁声波对辐射带电子作用的物理机制与动态效应。

(2) 磁声波广泛存在于整个辐射带区域，包括外辐射带、槽区和内辐射带。迄今的研究表明，它可存在于很宽的 MLT 范围，并可具有很大振幅。2013 年 6 月 29 日范阿伦卫星观测到的强磁声波可覆盖至少 12 个磁地方时（将在第 6 章论述），并且探测到的最大磁声波振幅达 2 nT 以上，超过了卫星高精度波形数据的阈值。由于从前的卫星缺乏对磁声波全面系统的探测，这些最新的探测极大地改变和拓展了人们对磁声波的认知。

(3) 当前合声波被认为是局地加速高能电子的主要来源，但是合声波只存在于等离子体层外，Zhao 等人观测到等离子体层内高能电子的加速，其来源目前还有待揭示^[64]。此外，他们报导在磁暴期间，槽区高能电子可快速形成蝴蝶状投掷角分布，而内辐射带电子则持久呈现出蝴蝶状分布，这些高能电子的蝴蝶状分布的起源尚属未知之谜。由于磁声波可存在于整个辐射带区域，磁声波的潜在作用值得深入探索。

1.6 波动与粒子的数据来源：范阿伦卫星

本论文的主要工作应用了范阿伦卫星的探测数据，本章我们对范阿伦卫星的背景、科学目标、设计特点做一个介绍，并简要介绍卫星的五组载荷。范阿伦卫星（Van Allen Probes），最初名为辐射带暴时探测器（Radiation Belt Storm Probes, RBSP），于2012年8月30日发射，设计服役时间为2年，预期寿命为4年。范阿伦卫星主要目标是探测地球辐射带环境，以及辐射带的动态变化，这对航天器控制、航天器系统设计与航天员安全有重要的实用价值。范阿伦卫星是美国航空航天局（NASA）的Living With a Star空间计划的一部分^[65]。Living With a Star是探索整个太阳系基础物理过程的一项计划，着重研究地球空间天气与大气层的灾害性现象，以及灾害发生的机制。

1.6.1 背景

上世纪90年代之后，CRESS、SAMPEX、CLUSTER、THEMIS等多颗卫星的观测表明，地球辐射带的动态变化比从前想像的更复杂更剧烈。1991年3月24日，在一个行星激波撞击地球之后，CRESS卫星探索到大量的15 MeV的电子与离子注入到 $L=2-3$ 的槽区，形成了一条全新的辐射带^[66,67]。而SAMPEX卫星在1993-2003年的一个太阳周期里的观测显示，辐射带存在多时间尺度的变化，而导致这些动态变化的机制还不完全不清楚^[4]。在磁暴期间，磁层里发生各种复杂的物理过程，因此辐射带粒子在磁暴之后可能会增强、减弱，甚至基本不变。也就是说，辐射带高能粒子对磁暴的响应并不一致，因而需要新的探测器对粒子动态变化与空间波动做广泛的探索。在这种背景下，范阿伦卫星应运而生。

1.6.2 科学目标

范阿伦卫星的主要工程目标，是理解并最终准确预报在太阳、行星际各种活动的影响下，空间中高能电子与离子的动态分布^[65]。科学目标主要有以下4点：

- 1) 研究辐射带粒子的加速、输运、沉降与损失等多种机制，量化高能电子形成过程的绝热与非绝热贡献；
- 2) 理解辐射带结构的形成与衰退的瞬时变化；
- 3) 理解磁暴期间的环电流以及亚暴期间的种子电子对辐射带电子影响；
- 4) 基于上述物理机制与卫星探测数据，发展在太阳活动周期里的辐射带模型，并发展辐射带动态变化的预报。

	超低频波	电磁离子回旋波	磁声波	嘶声	合声波	电子静电回旋波
频率	~2 mHz - 5 Hz	$f_{O+} - f_{cp}$, 约0.1-5 Hz	$f_{cp} < f < f_{LHR}$	~20-2000 Hz	0.1-0.8 f_{ce}	$\sim (N + \frac{1}{2}) f_{ce}$
空间分布	整个磁层, 地面可观测到	plume区附近	整个磁层, 等离子体内外都有	等离子体层内, 日侧居多	等离子体层外, 夜侧、晨侧与日侧	等离子体层外, 夜侧、晨侧与日侧
激发(起源)	太阳风扰动、磁层等离子体不稳定性	离子各向异性 $T_{\parallel} < T_{\perp}$	环电流质子分布函数的正梯度	合声波传播至等离子体层内	电子各向异性 $T_{\parallel} < T_{\perp}$, 非线性波粒相互作用	等离子体片电子的损失锥不稳定性
传播	沿磁力线以及跨越磁力线传播	主要沿磁力线传播	垂直磁力线传播, 可同径向与环向传播	主要沿磁力线传播	下带主要沿磁力线传播, 上带可斜传播	
极化		左旋圆极化	接近线性极化	圆极化	右旋圆极化	
精细结构	可分为极向模与环形模	有上升调结构	是 f_{cp} 的谐波, 有上升调结构	一般无明显结构	有上升调、下降调结构	
作用	通过弹跳-漂移共振, 以及径向向内扩散加速电子	沉降质子形成质子极光; 快速沉降MeV电子		沉降等离子体层高能电子, 形成槽区	沉降各能量电子形成脉动极光; 加速高能电子的主要来源	沉降等离子体片电子, 形成弥散极光

表 1.1 地球内磁层中各种重要的等离子体波动, 及其频率特征、空间分布、激发机制、传播特性、极化特性、精细结构以及对辐射带中的作用一览。

1.6.3 设计

范阿伦卫星的设计具有以下特点^[65]:

- 1) 它由两颗卫星组成, 它们载有相同仪器。
- 2) 两颗卫星在相近的椭圆轨道运行, 近地点约为 600 公里高, 远地点的地心距约为 5.8 个地球半径, 轨道倾角为 10° 。这种轨道设计使范阿伦卫星的探测覆盖了辐射带的主要区域。
- 3) 两颗卫星的远地点每年往顺时针方向(从北极往下看)移动 210° 。卫星设计服役时间为 2 年, 预期寿命为 4 年, 因此, 两颗卫星可以探索所有的地方时。
- 4) 两颗卫星的远地点距离相差约 130 公里, 这个微小的差别使得其中一颗卫星每隔 75 天追赶上另一颗卫星。因此两颗卫星的空间距离也在 100 公里至 $5 R_E$ 之间周期性变化, 两颗卫星可在数分钟至 4.5 小时不等的时间里重复探测同一地点。
- 5) 每颗卫星轨道周期为 9 小时, 其 inbound 与 outbound 测量的间隔为 4.5 小时, 短于辐射带对磁暴的响应时间(约为 1 天)。
- 6) 卫星轨道倾角为 10° , 使得卫星可探测绝大多数捕获的高能粒子。由于远地点的移动以及地球磁轴的倾斜, 卫星可探测的纬度为 $\pm 21^\circ$ 。
- 7) 卫星的自旋轴大致指向太阳方向, 更确切地说, 自旋轴与太阳方向保持在 27° 夹角范围以内。

1.6.4 卫星载荷

每个范阿伦卫星都载有 5 个仪器, 每个仪器系统都可在卫星系统中独立地运行。这 5 个仪器包括 ECT, EMFISIS, EFW, RBSPICE 与 RPS。

ECT

ECT, 即 The Energetic Particle, Composition, and Thermal Plasma Suite, 中文名为“高能粒子、成分分析与热等离子体组合”, 它测量内磁层各能量段的粒子, 精度比从前发射的卫星都要高。ECT 测量辐射带各种带电粒子速度、方向与成分, 包括多个能量段的电子、质子、氢离子、氧离子等。ECT 的粒子探测数据, 结合其它仪器的数据将有助于我们更全面地了解辐射带电子与离子的全球分布, 以及这些粒子的加速等变化过程。

ECT 仪器组包括 REPT, MagEIS 与 HOPE 三个仪器, 分别测量不同能量范围的粒子。其中 REPT (The Relativistic Electron-Proton Telescope, 相对论电子-质子望远镜) 可测量最高达 ~ 20 MeV 的高能电子与最高达 ~ 100 MeV 的质子, 它的主要目标是测量在外辐射带与槽区里的电子方向通量和能谱 ($\Delta E/E \sim 25\%$)^[69]。MagEIS (Magnetic

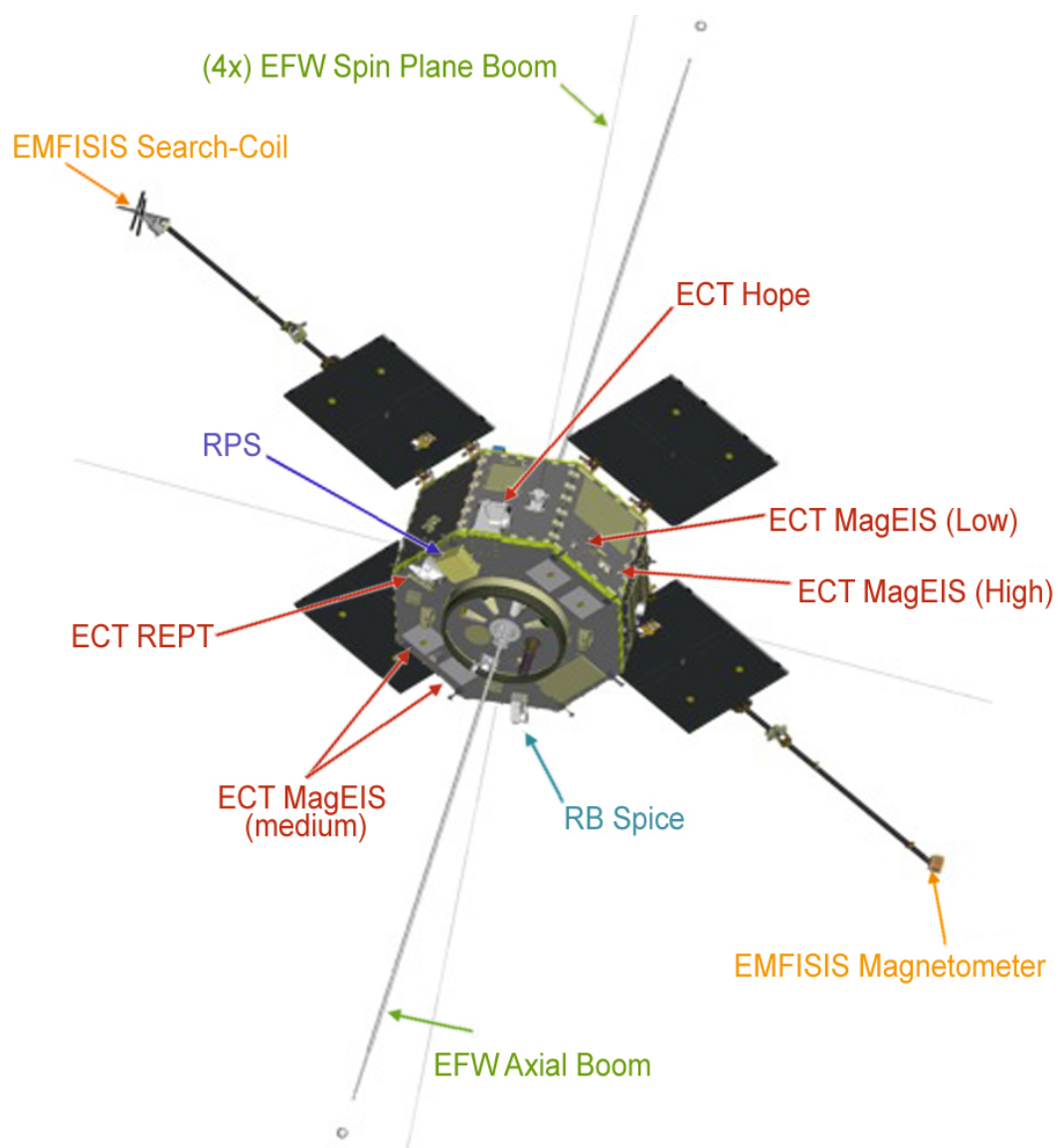


图 1.24 范阿伦卫星的载荷示意图。图来自<http://vanallenprobes.jhuapl.edu/science/overview.php>。

Electron Ion Spectrometer, 磁化电子与离子分光仪) 可测量 20-4800 keV 电子的微分通量, 同时也能测 55 keV-20 MeV 质子的微分通量^[70]。HOPE (Helium, Oxygen, Proton, and Electron, 氦氧氢与电子探测器) 仪器主要探测低能电子与氦、氧、氢三种离子的微分通量^[71]。

EMFISIS

EMFISIS, 即 “The Electric and Magnetic Field Instrument Suite and Integrated Science” 的缩写, 中文名为 “电场与磁场仪器套装及集成科学”, 这个仪器可用于研究在辐射带加速与损失过程中起作用的各种等离子体波动。辐射带区域除了高能粒子之外, 还充满着各种等离子体波动。空间磁场决定了受其约束的辐射带粒子分布的基本形态, 也反应了暴时环电流的变化。EMFISIS 主要探索目标包括: 1) 辐射带高能粒子的加速与损失的物理机制及动态过程; 2) 理解磁层中各重要波动的起源; 3) 探索空间磁场扰动。

EFW

EFW, 即 “The Electric Field and Waves Suite, EFW” 的缩写, 中文名为 “电场与波动套装”, 这个仪器主要研究近地空间的电场。空间中电场可加速辐射带电子, 并改变了内磁层的位形。EFW 可观测空间跨度为 1 公里至 200,000 公里的电场的结构, 并探索哪种电场是改变地球磁层结构的主要来源。EFW 同时也研究可加速高能电子的等离子体波, 有助于我们理解与粒子加速、散射、输运相关的电场波动, 以及改变磁层结构的大尺度电场。这个仪器包括一组 4 个自旋平面的电场天线, 以及一组 2 个自旋轴方向的管状电杆。

RBSPICE

RBSPICE, 即 “The Radiation Belt Storm Probes Ion Composition Experiment” 的缩写, 中文名为 “辐射带暴时探测器的离子成分实验”。这个仪器主要研究暴时环绕地球空间的环电流, 研究空间天气如何影响环电流, 以及环电流如何产生辐射带。这个仪器主要研究热的带电离子, 它可精确测量环电流的压强分布。通过探测离子, 它有助于我们理解暴时内磁层是如何变化的, 以及暴时条件下辐射带粒子的加速与损失机制, 及空间天气的灾害性影响。

RPS

RPS 即 “The Relativistic Proton Spectrometer” 的缩写, 中文名为 “相对论质子分光计”。这个仪器主要聚焦于内辐射带, 研究地球空间中最高能的质子。这些高能质

子可对宇航员与航天器造成灾害性影响。这个仪器的目标是发展辐射带环境的新的标准模拟，并用于未来卫星设计。

第二章 磁声波的观测：卫星数据分析

这一章展示如何应用范阿伦卫星丰富的观测数据研究磁声波，并构建磁声波的精细模型。针对 2013 年 8 月 21 日的一次大振幅磁声波的观测事件，本论文展示用两颗范阿伦卫星多个仪器观测到的磁声波的频谱结构，通过对波动数据的处理，得到磁声波的极化、传播等特性。范阿伦卫星上 EMFISIS 仪器套装能够进行一系列复杂的电磁场与直流磁场的测量^[72]，提供不同频段、不同格式的波动测量数据。EMFISIS 包括测量高频电场的 HFR（High Frequency Receiver）仪器，测量 10 Hz - 12 kHz 范围内波动的 WFR（WaveForm Receiver）仪器，以及测量直流磁场的 MAG（Fluxgate Magnetometer）仪器。HFR 测量 10-500 kHz 范围内的电场波动，因而它可以提供高混杂波动频率 f_{UHR} 的测量，从而推算出等离子体密度这一关键参数，也可用于判断卫星是否在等离子体层。WFR 与 MAG 提供的多种数据都可应用于磁声波的观测，有不同的适用范围与作用。

1) WFR 不间断地测量 10 Hz - 12 kHz 之间的电场与磁场波动功率谱密度，覆盖了近地磁声波的频率范围。

2) WFR 同时选择性地开启 burst mode，以 35 kHz 的采样频率测量高精度波形数据，它可以用来观测磁声波在短时间里的精细频谱结构，并可精确构建传播角分布，从而可以用来建立精确的磁声波模型。

3) MAG 提供各在各种坐标系下（包括卫星旋转坐标系，以及 GEI, GEO, GSE, GSM, SM 地球坐标系）的直流磁场测量，并提供多种采样频率的数据。高精度的直流磁强计数据（64 Hz 采样频率）也可以用来分析低频段的磁声波磁场功率谱与特性。

此外 EFW 提供的直流电场观量（32 Hz 采样频率）也可用来分析低频段磁声波的电场功率谱，并联合磁强计数据可得到波印亨矢量。

2.1 WFR 仪器的磁声波频谱观测

WFR 仪器测量频率在 10 Hz-12 kHz 范围内的电磁波的频谱，应用奇异值分解（Singular Value Decomposition, SVD）^[73]方法，可得到波动的传播与极化特性。这是我们研究甚低频波动（磁声波、嘶声与合声波，等等）及其特性的主要数据来源。

图 2.1 展示的是 2013 年 8 月 21 日 06:00-09:00 UT，范阿伦 A 卫星在地球昏侧的波动观测，以及质子分布函数的观测。图 2.1a 中 AE 指数显示磁层中刚经历一次亚暴

注入。图 2.1b 显示的是 HFR 仪器探测的高频电场波动，频率范围在 10-500 kHz，图中清晰地显示高混杂（Upper Hybrid Resonant frequency, f_{UHR} ）波。我们利用高混杂波频率数据，及如下波动频率关系

$$\begin{aligned} f_{UHR}^2 &= f_{ce}^2 + f_{pe}^2, \\ f_{pe}^2 &= \frac{N_e e^2}{2\pi\epsilon m_e}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

即可计算背景等离子体密度。图中所示的期间，等离子体密度约为 $N_e = 280 \text{ cm}^{-3}$ ，因而卫星探测的区域为致密的等离子体层。图 2.1c 与 d 分别展示了 WFR 探测的频率在 10 Hz-12 kHz 范围内的磁场与电场波动功率谱，其中两条白色线分别代表电子回旋频率 f_{ce} 与低混杂波频率 f_{LHR} 。在 06:20-07:10 UT 间，卫星观测到频率在 f_{LHR} 以下的很强电磁波动，其频率范围约为 10-100 Hz，最大振幅约为 1.5 nT。这个波动在磁赤道附近（纬度为 3° ），接近线性极化（即具有很低的椭圆极化率，图 2.1e），接近垂直传播（传播角接近 90° ，图 2.1d），由此可判断它是磁声波。图 2.1e-d 中波动的传播角与极化率是由奇异值分解方法所计算得到，方法在下节介绍。

在 07:00-08:10 UT 期间，我们还可观测到较高频率（ $\sim 100 \text{ Hz}$ ）的磁声波波动。整个时间段，我们都看到 90° 投掷角的 50 eV-20 keV 质子的分布函数有环结构，这表明观测到的磁声波很可能是局地激发的。

2.2 低频磁声波：磁强计数据分析

EMFISIS 提供了两组传感器，由三个轴组成的测量高频波动的搜寻线圈磁强计（Search Coil Magnetometer, MSC），以及三轴测量直流磁场的通量门磁场计（Magnetometer, MAG）。MAG 仪器提供在 GSM、SM、GEI、GSE、GEO 等地理坐标系，以及在卫星旋转坐标系的三维磁场，并提供三种精度：64 Hz 高分辨率磁场，以及 1s 平均、4s 平均的磁场数据。通过对 64 Hz 高分辨率磁场做快速傅里叶变换（FFT），我们可以得到频率在 32 Hz 以下的低频波动谱，低频的磁声波在这个频率范围内。

我们用磁强计数据分析了 2013 年 8 月 21 日事件里的磁声波。两颗卫星在 06:00 至 09:00 的时间里在 SM 坐标系下赤道投影轨道如图 2.2 所示。两颗卫星都在昏侧观测到磁声波。对三个小时里的高时间分辨率磁场做傅里叶变换，我们得到两颗卫星观测到的磁声波在低频范围（2-32 Hz）的功率谱，如图 2.3 所示。由于 WFR 给出的波动功率谱只能观测到磁声波的高频部分，而 MAG 数据可以给出高分辨率的低频频谱，因此它是 WFR 观测磁声波的补充。

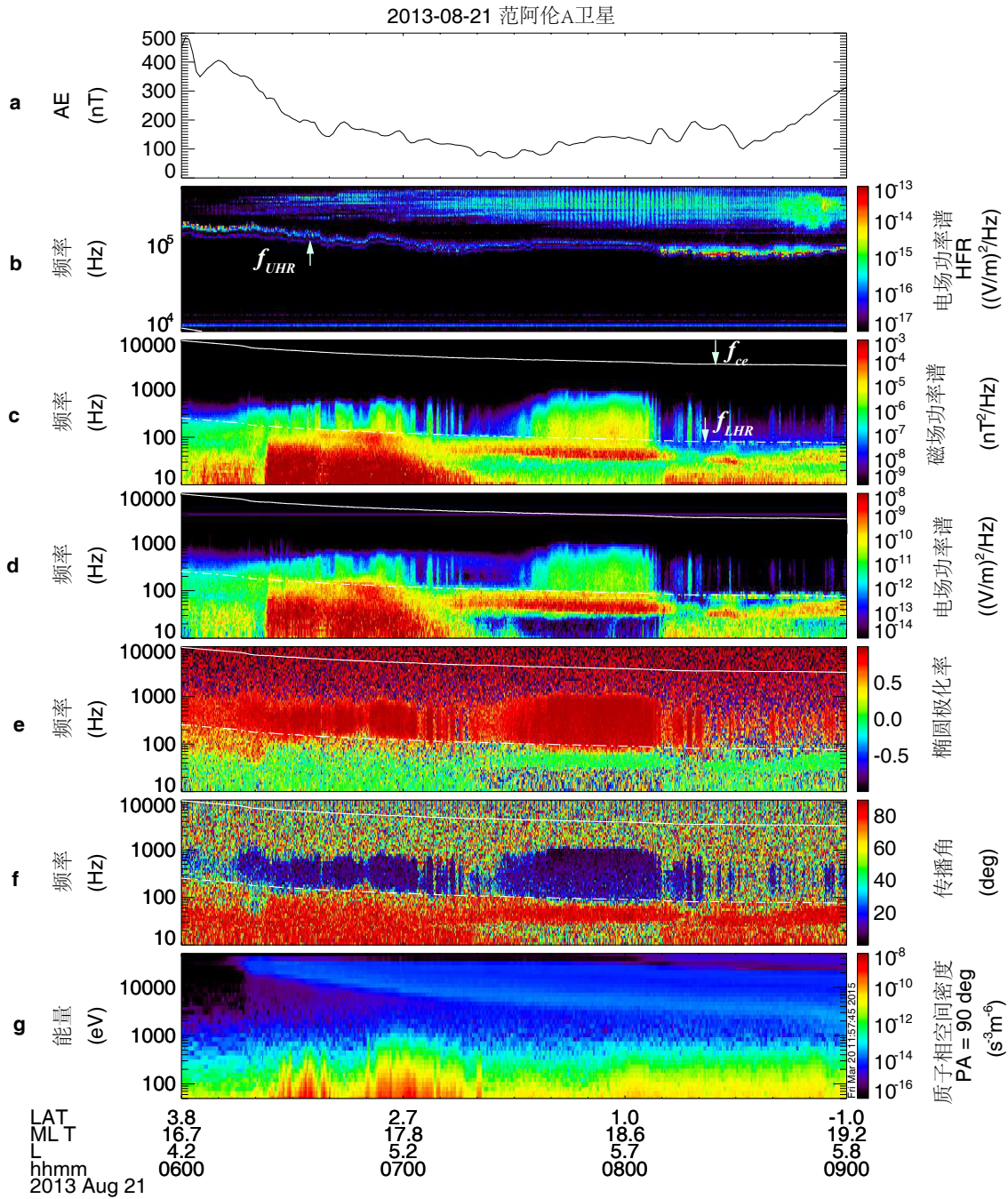


图 2.1 在 2013 年 8 月 21 日 06:00-09:00 UT 时间里, Van Allen Probe B 卫星的波动观测及质子环状相空间密度分布。a, AE 指数; b, HFR 观测的频率在 10-500 kHz 之间的高频电场, 以及高混杂波频率 f_{UHR} ; c, WFR 观测的频率在 10-12000 Hz 之间的磁场波动功率谱密度, 以及电子回旋频率 f_{ce} 与低混杂波频率 f_{LHR} ; d, WFR 电场波动功率谱密度; e, 奇异值分解方法计算的波动的椭圆极化率; f, 波动传播角; g, 90° 投掷角质子分布函数。

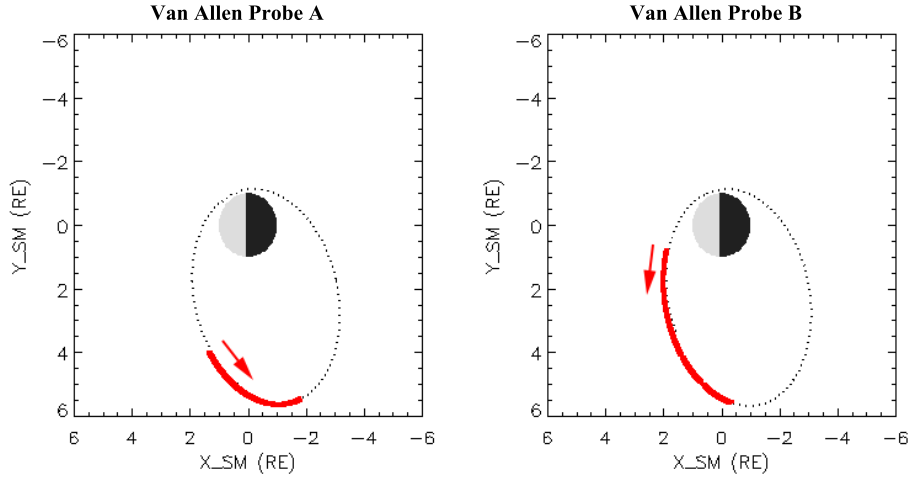


图 2.2 2013 年 8 月 21 日 06:00-09:00 UT 时间里，范阿伦两颗卫星在 SM 坐标系下 XY 平面内的轨迹图（红色线）。箭头标示卫星运动的方向。

范阿伦 A 卫星在 06:23 UT 所观测到的磁声波呈明显的谐波结构，而且是局地离子回旋频率的谐波。其中第 1 阶谐波最强，且随着谐波阶数提高，频谱密度降低。随着 A 卫星向远地点运动，局地离子回旋频率降低，而磁声波的各谐波频率都升高。在 7:20 UT 之后，A 卫星在 32 Hz 以下低频范围没有观测到磁声波，然而在 08:00 UT 该卫星再次观测到一组比较弱的磁声波。

范阿伦 B 卫星与 A 卫星在同一轨道上，但比 A 卫星滞后 1 个多小时。在 06:23 UT，B 卫星同时也观测到磁声波，与 A 卫星一样观测到同频率的谐波结构，并且同样观测到磁声波频率的随时间上升的变化。但此时 B 卫星观测到的磁声波强度比 A 卫星的观测弱 2 个数量级。在 08:00 UT，B 卫星与 A 卫星同时观测到的同结构的磁声波，但 B 卫星观测到的磁声波强度高 1 个多数量级。从两颗卫星观测到的磁声波结构来看，两颗卫星在同一时刻观测到的为同一起源的磁声波在空间中传播的效应。

利用 Means 等人发展的方法，我们可以从磁强计数据得到低频磁声波的传播角、极化率等参数。由于这种方法常用于处理高精度的 waveform 数据，我们将在下节做介绍，此不赘述。

2.3 高精度 Waveform 数据分析

磁层中的观测到的快磁声波的频率一般在 5-500 Hz 范围。WFR 不间断的波动频谱测量只能给出 10 Hz 以上的波动观测，且频率精度较低。而 MAG 磁强计可给出频率在 32 Hz 以下的波动观测。而利用卫星选择性测量的 burst waveform 数据，可得到在整个频率范围内的磁声波。Waveform 数据是高采样频率的三维磁场与三维电场波形，采样频率为 35 kHz，每段数据持续 5.98 秒钟。尽管 WFR 仪器在旋转的卫星坐标

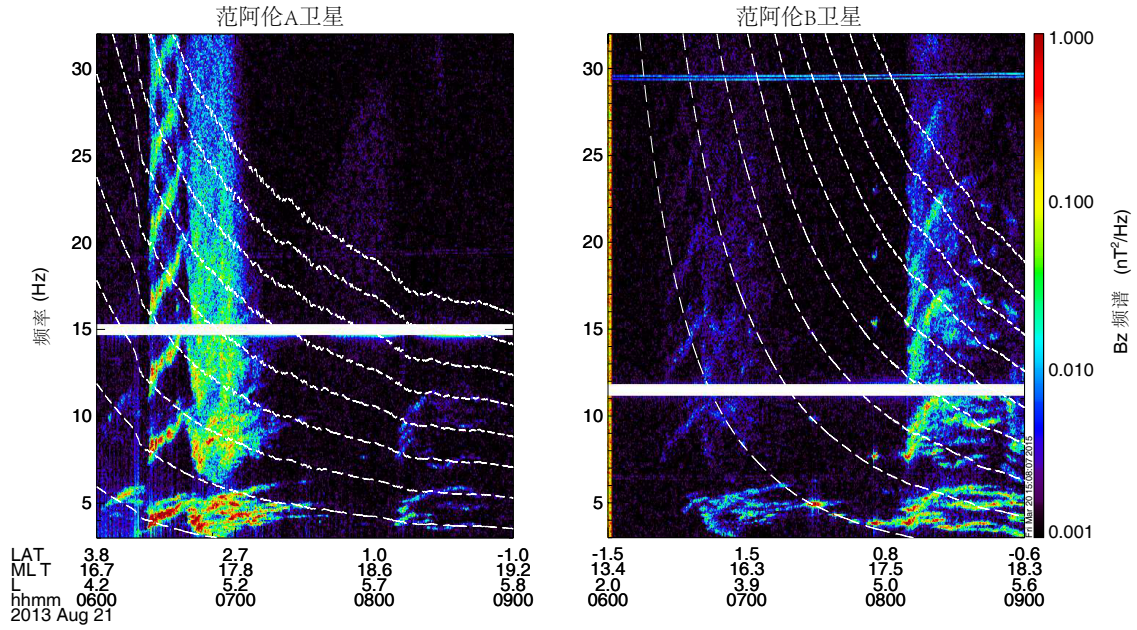


图 2.3 范阿伦 A 卫星与 B 卫星在 2013 年 8 月 21 日 06:00 - 09:00 UT 时间里观测到的磁声波功率谱密度，以及赤道离子回旋频率的谐频。两颗卫星的联合观测显示出磁声波在空间里的传播。

系下测量电磁波功率谱密度与波形，结合磁强计（Fluxgate Magnetometer）^[72] 在卫星旋转坐标系下测量的直流磁场数据，我们可以得到场向坐标系下的波动分量。这些高精度波形测量数据可以用来计算与分析磁声波的频谱、传播特性、极化特性和坡印亭矢量。

2.3.1 磁声波高精度频谱结构：波形的坐标转换与相位校正

范阿伦的高精度的 burst mode 波形数据是在卫星旋转坐标系（uvw）下测量的。结合在该坐标系下的直流磁场测量，我们可以把卫星坐标系的测量转换到场向坐标系。对场向坐标系三维磁场与电场波形做快速傅里叶变换之后，我们需要对每个频率的磁场与电场分量做校正。校正方法及参数见 <http://emfisis.physics.uiowa.edu/>。

图 2.4 显示的是范阿伦 A 卫星在 06:24 UT 探测的 burst mode 波动数据经坐标转换与相位校正之后的频谱图，其中上图为磁场频谱，下图展示了总电场波动频谱以及在自旋平面内的电场波动频谱。我们可看到磁场与电场频谱有明显的谐波结构，并且与离子回旋频率的谐波吻合。卫星旋转轴的电场（ E_w ）在 16 Hz 以下的低频范围受到污染，因而总电场强度也受到污染。但在旋转平面的电场强度仍显示明显的谐波结构。

2.3.2 传播角的计算

磁声波主要通过朗道共振

$$\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = 0 \quad (2.2)$$

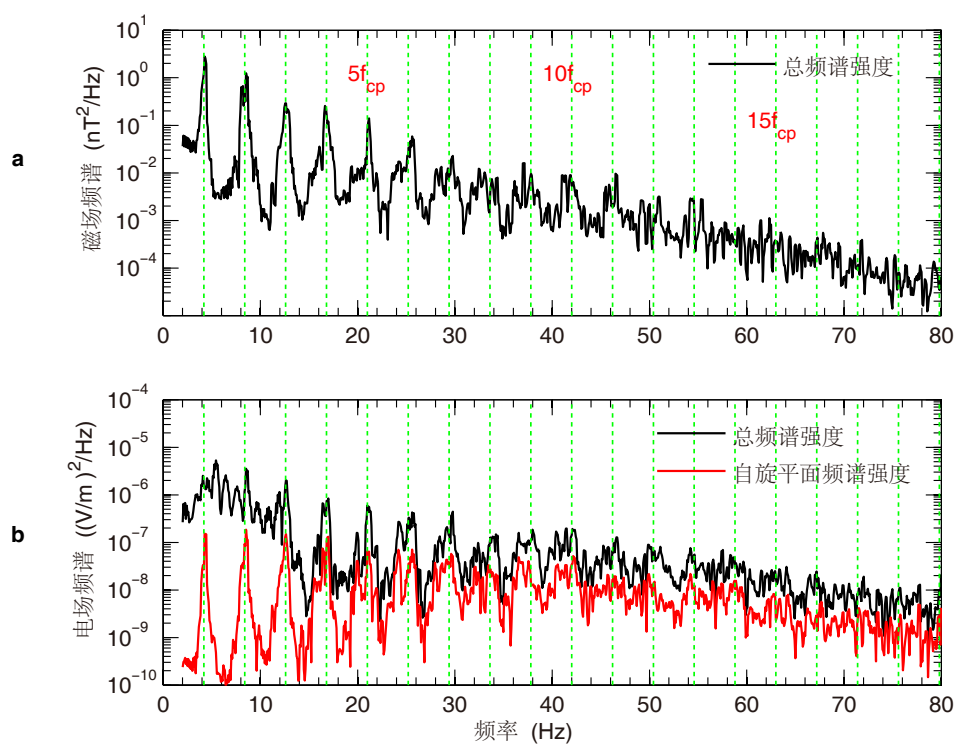


图 2.4 范阿伦 A 卫星在 2013 年 8 月 21 日 06:24 UT 时刻探测的磁声波磁场与电场功率谱密度，数据来源是 WFR 的 burst mode 高精度波形数据。卫星自旋轴方向测量的电场波动在低频范围内有污染，因而电场总强度在低频范围也被污染。

与辐射带高能电子相互作用。由于磁声波传播角 θ 接近 90° ，而其平行方向的波数 $k_{\parallel} = k \cos \theta$ 。在其它参数相同的情况下， $\theta = 89^\circ$ 的磁声波比 $\theta = 88^\circ$ 的磁声波对应的朗道共振速度大一倍。因而精确量化传播角的数值及其分布至关重要。前面我们提到过用 SVD 方法可计算波动的传播角以及极化参量，这种方法可应用于所测量的频谱矩阵数据。对于高精度的波形数据，我们可以通过更简单的方法计算波动在各频率下的传播角。我们把磁场波形转换到场向坐标之后，对之进行快速傅里叶变换并做相位校正，得到在特定频率下的磁场波动在傅里叶空间的复数相 $\mathbf{B} = \mathbf{B}^r + i\mathbf{B}^i$ 。由于 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ ，波矢的方向可以直接通过以下方式求得

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{B}^r \times \mathbf{B}^i}{|\mathbf{B}^r \times \mathbf{B}^i|}. \quad (2.3)$$

传播角的计算为 $\theta = \arccos(\hat{k}_z/|\hat{\mathbf{k}}|)$ ，这里 $\hat{k}_z$ 为波矢单位向量的场向分量。波动的极化参数也可以用 Means^[74] 方法求得，此不赘述。在第六章中，我们在模拟 2013 年 6 月 29 日磁暴事件里磁声波与电子相互作用，就利用上述方法精确建立了磁声波各谐波的传播角分布模型。

2.4 小结

这一章我们介绍了利用范阿伦卫星的三种数据，观测磁声波的频谱结构。对三种波动测量数据，我们也介绍了计算波动传播角、极化率等参数的方法。三种数据对磁声波的观测是相辅的，其中 WFR 的频谱观测能给出在长时间里、很宽频率范围里的波动观测，磁强计数据适用于研究低频范围的磁声波，而高精度 waveform 数据可用于分析磁声波频谱的精细结构及其相关特性，并用于精确的建模。我们结合 2013 年 8 月 21 日的磁声波观测事例，通过三种数据的展示，从多种角度分析了这个事件中磁声波的丰富特性。

第三章 粒子运动与波粒作用模拟

在辐射带物理里，高能相对论电子的加速起源、输运以及损失的机制及过程是人们的重点关注问题。模拟单粒子运动对研究整个辐射带电子的动态效应有重要指导意义。因此我们从单粒子在稳恒场中运动，以及单粒子在扰动场中与波动作用的机制与原理出发。了解了单粒子（或试验粒子）的运动规律后，我们就可更好地了解等大量带电粒子在磁层中运动的动态效应。

模拟单个试验粒子运动的最基本算法为积分洛伦兹力方程。带电粒子在空间磁场中有三种周期性运动，即回旋运动、弹跳运动和漂移运动，其时间尺度相差多个数量级，因此模拟粒子在空间电磁场中的运动，往往需要采取高效的粒子运动回旋平均算法。

1) 本论文此章第一节发展变分辛积分算法在辐射带物理中的应用，这种算法可模拟在稳恒电磁场中带电粒子导心的长时间运动，我们将这种算法应用于模拟与磁声波激发相关的环电流质子漂移运动中。这种辛积分算法具有长时间数值精确性、物理守恒性等特性。

2) 本论文此章第二节改进并发展了模拟电磁波动对带电粒子共振作用的试验粒子模拟算法。它可模拟空间磁声波（以及合声波等多种波动）对电子的作用。我们对 Bell 与 Bortnik 等人发展的回旋平均算法做出重要改进，指出其公式中的符号缺陷，这个符号问题在模拟磁声波对电子作用的过程中可产生严重错误。我们改进后的公式可正确地分析磁声波对电子作用的物理机制，能有效模拟辐射带粒子在波动中被加速、散射的过程。

3.1 导心运动的变分辛积分模拟

这一节，我们介绍模拟带电粒子在电磁场中导心运动的算法——变分辛积分算法 (Variational Symplectic Integrator, VSI)。因为有大量的关于粒子运动的公式推导，这一节我们采用自然单位制，即在有理化国际单位制中，假设带电粒子的电荷、质量以及真空中光速都是 1，即 $e = 1$, $m = 1$, $c = 1$ 。

磁化等离子体的运动具有多种时间尺度。例如，在磁层 $L=5$ 处，一个能量为 $E_k = 1 \text{ MeV}$ ，投掷角为 45° 的相对论电子，它的回旋运动周期为 0.14 ms ，弹跳运动周期为 0.4 s ，漂移运动周期为 14 min 。由于我们需要模拟带电粒子在长时间里的运

动，长时间积分的数值精确性至关重要。因此我们需要有全局守恒性的数值算法，保证长时间模拟的数值精确性与物理守恒性。辛积分算法保持哈密顿系统辛结构（或辛流形），其效应与物理学的刘维定理等价。因此，辛积分算法被广泛应用于粒子运动模拟。

在已知电场与磁场 $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ 及 $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ 中，给定一个带电粒子在某坐标系下的位矢、动量相空间初始状态 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$ ，我们可以通过求解洛伦兹方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \frac{\mathbf{p}}{\gamma} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}). \\ \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{p}}{\gamma}\end{aligned}\tag{3.1}$$

得到这个粒子在之后时间里的运动状态。这里 $\mathbf{p}$, γ , $\mathbf{E}$ 以及 $\mathbf{B}$ 代表普遍约定的物理量，在第一章中已描述。上述 6 个常微分方程一般为非线性，没有解析解，但是可以通过标准常微分方程数值解法求解。常用的标准算法是龙格-库塔（Runge-Kutta）算法，常用的具体算法有欧拉算法（即二阶龙格-库塔算法）、四阶龙格库塔算法（RK4）等，五阶龙格-库塔算法（RK5），等等，其中阶数代表龙格-库塔算法积分过程中误差的阶数。尽管龙格-库塔算法每一步积分的误差非常小，但误差在长时间计算里会积累，从而产生很大的数值误差。

对于具有正则结构的哈密顿系统，辛积分算法具有全局守恒性与长时间数值精确性。辛积分算法由我国冯康等人^[75]发展，系统的辛算法大约从 1988 年开始研究。辛积分算法保持哈密顿系统辛结构（或辛流形），三维空间中粒子运动的辛结构为 $d\mathbf{P} \wedge d\mathbf{x}$ ，与物理学的刘维定理等价。刘维定理是指在哈密顿系统中，粒子在运动轨迹上保持相空间密度守恒。

模拟磁层中带电粒子的运动，我们常常对粒子做回旋平均，只关心它的导心运动，而忽略它的快速回旋运动。这样的好处在于，我们可以更直接方便地了解粒子的运动，并且在模拟中大大节省 CPU 计算时间。

带电粒子在稳恒电磁场中导心的漂移速度由方程 1.2（非相对论）与 1.3（相对论）给出。模拟导心在磁层中长时间的运动，需要找到一种辛积分算法。然而在一般磁场位形中，导心运动不是正则哈密顿系统，不具有全局正则结构。不能用传统的辛积分算法。借鉴 Marsden and West^[76]，以及 Qin^[77,78]等人的工作，我们将变分辛积分算法应用于磁层物理研究，模拟在磁层中带电粒子的导心运动。由于这种方法从离散化导心的拉格朗日量与变分原理出发，因而叫变分辛积分（Variational Symplectic Integrator, VSI）。这种变分辛积分算法可以保持全局辛结构，并且把能量（及其它物

理不变量) 的全局误差控制在一个小范围内。

3.1.1 变分辛积分算法

地球辐射带具有大量 ~ 100 keV 至数 MeV 的高能电子, 这些高能电子的运动必须用相对论来描述。带电粒子导心运动的拉格朗日量最早由 Grebogi^[79] 和 Littlejohn^[80] 推导, 为

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, U, \dot{\Theta}) = [\mathbf{A}(\mathbf{x}) + U\mathbf{b}(\mathbf{x})] \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mu\dot{\Theta} - (\Gamma(\mathbf{x}, U) + \phi). \quad (3.2)$$

这里 $\mathbf{x}$ 是粒子导心的坐标, $U \equiv \gamma mu \equiv p_{\parallel}$ 是平行动量, μ 是粒子第一绝热不变量, 即磁矩守恒量, Θ 是回旋相位, $\mathbf{b}$ 是背景磁场的单位向量。 Γ 是用导心参数表达的相对论因子展开的一阶项, 表达式为

$$\Gamma(\mathbf{x}, U) = \sqrt{1 + U^2 + 2\mu B(\mathbf{x})}. \quad (3.3)$$

接下来, 我们用修正的矢势 $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + U\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 表达拉格朗日量。为简单起见, 我们假定背景场是不随时间变化的。

导心运动方程可以通过欧拉-拉格朗日关系得到。对回旋相位应用欧拉-拉格朗日关系得到

$$\dot{\mu} = 0 \text{ or } \mu = \text{const.} \quad (3.4)$$

上述方程说明磁矩 μ 是导心运动的守恒量。对平行动量应用欧拉-拉格朗日关系得到

$$\frac{\partial L}{\partial U} = 0 \text{ or } U = \Gamma \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (3.5)$$

对导心坐标应用欧拉-拉格朗日关系得到

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad (j = 1, 2, 3), \quad (3.6)$$

也就是

$$\frac{d}{dt} (A_j^{\dagger}) - A_{i,j}^{\dagger} \dot{x}_i + (\mu B / \Gamma + \phi)_{,j} = 0, \quad (j = 1, 2, 3), \quad (3.7)$$

对 $dA_j^{\dagger}/dt$ 项展开, 我们得

$$(A_{j,i}^{\dagger} - A_{j,i}^{\dagger}) \dot{x}_i + (\mu B / \Gamma + \phi)_{,j} + \dot{U} b_j = 0, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (3.8)$$

我们采用修正的磁场与电场

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^\dagger &\equiv \nabla \times \mathbf{A}^\dagger, \\ \mathbf{E}^\dagger &= -\nabla\phi^\dagger - \frac{\partial \mathbf{A}^\dagger}{\partial t} = -\nabla\phi - \mu\nabla B/\Gamma - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - U\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t},\end{aligned}\quad (3.9)$$

方程 (3.8) 即

$$\mathbf{B}^\dagger \times \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{E}^\dagger + \dot{U}\mathbf{b} \quad (3.10)$$

对方程 (3.10) 与 $\mathbf{b}$ 做叉乘, 并利用 $(\mathbf{B}^\dagger \times \dot{\mathbf{x}}) \times \mathbf{b} = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{B}^\dagger \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{B}^\dagger(\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{b})$ 与 $B_\parallel^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \cdot \mathbf{b}$, 我们得到

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{B}^\dagger U/\Gamma - \mathbf{b} \times \mathbf{E}^\dagger}{\mathbf{B}_\parallel^\dagger}. \quad (3.11)$$

方程 3.11 包含了梯度漂移和曲率漂移, 其中曲率漂移隐藏在 $\mathbf{B}^\dagger/\mathbf{B}_\parallel^\dagger$ 里。对方程 (3.10) 与 $\mathbf{B}^\dagger$ 点乘得平行动量运动方程

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{B}^\dagger \cdot \mathbf{E}^\dagger}{\mathbf{B}^\dagger \cdot \mathbf{b}} = \frac{\mathbf{B}^\dagger \cdot \mathbf{E}^\dagger}{\mathbf{B}_\parallel^\dagger}. \quad (3.12)$$

模拟粒子导心运动, 传统的解常微分方程数值算法是离散化常微分方程 (3.11) 和 (3.12)。变分辛积分算法是另外一种做法, 其出发点是变分原理。假设在 $t = 0$ 与 $t = \tau$ 时刻拉氏量固定, 在所有可能的 $(\delta\mathbf{x}, \delta U)$ 变量中, 导心运动是使如下路径积分取最小值的解

$$A = \int_0^\tau L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, U, \dot{U}) dt, \quad (3.13)$$

我们先离散化作用量 A , 然后对离散化作用量求最小值, 得到导心运动的 $(\mathbf{x}, U)$ 的向前推进的迭代关系。我们先在均匀的时间轴 $t = [0, h, 2h, \dots, Nh = \tau]$ 上离散化作用量

$$A \approx A_d = \sum_{k=0}^{N-1} h L_d(k, k+1), \quad (3.14)$$

这里 $\Delta t = h$ 是积分步长, $L_d(\mathbf{x}_k, U_k, \mathbf{x}_{k+1}, U_{k+1})$ 是在 $t = [kh, (k+1)h]$ 时间内离散化的拉格朗日量。这里 $L_d(k, k+1)$ 是 $t = kh$ 与 $t = (k+1)h$ 两时刻里的 $(\mathbf{x}, U)$ 的函数, 即 $(\mathbf{x}_k, U_k)$ 与 $(\mathbf{x}_{k+1}, U_{k+1})$ 的函数。离散化作用量 L_d 的一阶近似可取为

$$L_d(k, k+1) \equiv \mathbf{A}^\dagger(k, k+1) \cdot \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{h} - \Gamma(k, k+1) - \phi(k, k+1), \quad (3.15)$$

这里 $\mathbf{A}^\dagger(k, k+1)$, $\Gamma(k, k+1)$ 与 $\phi(k, k+1)$ 代表 $[(\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_{k+1})/2, (u_k + u_{k+1})/2]$ 的函数。

为得到导心运动的迭代关系，我们假定 $(\delta \mathbf{x}_0, U_0) = (\delta \mathbf{x}_N, \delta U_N) = (0, 0)$ 。对于自变参数 $(\delta \mathbf{x}_k, \delta u_k)$ ($0 < k < N$)，作用量 A_d 取最小值的必要条件是

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k^j} [L_d(k-1, k) + L_d(k, k+1)] &= 0, \quad (j = 1, 2, 3), \\ \frac{\partial}{\partial u_k} [L_d(k-1, k) + L_d(k, k+1)] &= 0. \end{aligned}$$

这里 x_k^j 是 $\mathbf{x}_k$ 的第 j 个分量， $j = 1, 2, 3$ 。上述两个方程正是离散化拉格朗日量 L_d 的欧拉-拉格朗日关系。代入 L_d 的表达式方程(3.15)，则上述两个方程变为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} A_{i,j}^\dagger(k, k+1)(x_{k+1}^i - x_k^i) + \frac{1}{2h} A_{i,j}^\dagger(k-1, k)(x_k^i - x_{k-1}^i) - \frac{1}{h} [A_j^\dagger(k, k+1) \\ - A_j^\dagger(k-1, k)] = \frac{\mu B_{j,i}(k, k+1)}{2\Gamma(k, k+1)} + \frac{\mu B_{j,i}(k-1, k)}{2\Gamma(k-1, k)} + \frac{\phi_{j,i}(k, k+1) + \phi_{j,i}(k-1, k)}{2}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{2h} b_i(k, k+1)(x_{k+1}^i - x_k^i) + \frac{1}{2h} b_i(k-1, k)(x_k^i - x_{k-1}^i) = \frac{U_k + U_{k+1}}{4\Gamma(k, k+1)} + \frac{U_{k-1} + U_k}{4\Gamma(k-1, k)}. \quad (3.17)$$

这两个方程正是从 $(\mathbf{x}_{k-1}, U_{k-1})$ 与 $(\mathbf{x}_k, U_k)$ 映射到 $(\mathbf{x}_{k+1}, U_{k+1})$ 的隐式表达式。

在我们的模拟中，直接通过上述映射关系求解粒子运动有可能带来数值不稳定性，其 U_k 值在模拟数个弹跳运动周期之后将发生振荡。仔细看上述迭代关系，我们发现所有含 U 的项都是以 $\frac{1}{2}(U_k + U_{k+1})$ 的形式出现。因此上述迭代关系，其实也正是从 $(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k, U_{k-\frac{1}{2}})$ 到 $(\mathbf{x}_{k+1}, U_{k+\frac{1}{2}})$ 的蛙跳式迭代，这里 $U_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U_k + U_{k+1})$ 。这个蛙跳式迭代是稳定的。

我们可以通过对比微分方程 (3.11)，(3.12) 与上述离散化迭代式 (3.16) 与 (3.17)，建立导心运动的连续性常微分方程与变分离散化的联系。方程 (3.17) 对应了 U 的定义式(3.5)。为了看微分方程 (3.11)，(3.12) 与离散方程 (3.16) 的关系，我们可以对 $\frac{1}{h}[A_j^\dagger(k, k+1) - A_j^\dagger(k-1, k)]$ 项做 Taylor 展开，即

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} [A_j^\dagger(k, k+1) - A_j^\dagger(k-1, k)] &\approx \frac{A_{j,i}^\dagger(k)}{h} \left(\frac{x_{k+1}^i + x_k^i}{2} - \frac{x_k^i + x_{k-1}^i}{2} \right) \\ &+ \frac{1}{h} \left(\frac{U_{k+1} + U_k}{2} - \frac{U_k + U_{k-1}}{2} \right) b_j = \frac{A_{j,i}^\dagger(k)}{2h} (x_{k+1}^i - x_{k-1}^i) + \frac{U_{k+1} - U_{k-1}}{2h} b_j, \end{aligned} \quad (3.18)$$

即可看出对应关系。方程 (3.16) 与 (3.17) 保证了与 L_d 相关的非正则辛结构 Ω_d 的守恒，这是变分辛积分的最重要特征。细节讨论可参考 Qin 等人的文章^[77,78]。

3.1.2 相对论电子在偶极地磁场中的运动

如第一章所讲述，带电粒子在内磁层中有回旋、弹跳、漂移三种绝热运动。当磁场随时间的变化比这些运动的时间尺度更缓慢的情况下，上述三种绝热运动对应三种绝热不变量。在长时间模拟粒子运动过程中，保持这三个绝热不变量以及粒子能量守恒，是至关重要的。

这里我们将变分辛积分算法应用于纯偶极子地磁场中带电粒子的导心运动中。高能电子的电场漂移相对比较弱，因而这里我们只模拟磁场漂移。偶极子磁场在球坐标系下的矢势为

$$A = -\frac{M \sin \theta}{r^2} \mathbf{e}_\varphi, \quad (3.19)$$

这里 M 是地球磁矩。上述矢势对应的磁场为

$$\mathbf{B} = -\frac{M}{r^3} [2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta]. \quad (3.20)$$

地球表面赤道上的磁场大小为 $B_0 = 0.31 \text{ G}$ ，上式中 $M = B_0 R e^3 = 8.04 \times 10^{25} \text{ erg/G}$ 。

我们模拟在 $L = 5.0$ 处一个能量为 $E_k = 1 \text{ MeV}$ ，投掷角为 $\alpha = 45^\circ$ 的高能电子在 (r, θ) 平面里的运动。MeV 高能电子通过波粒共振相互作用的典型沉降时间为 1 天量级，因而我们通常需要对粒子运动做长时间模拟。这里我们同时用 VSI 与 RK4 方法模拟这个粒子的弹跳运动，模拟步长都取为 $\Delta t = T_b/40$ ，这里 $T_b = 0.4 \text{ s}$ 是该粒子的弹跳周期。图 3.1 显示，RK4 方法所模拟的导心轨迹逐渐向赤道和低纬收缩，这是数值误差的积累。RK4 方法的长时间不精确性显示它并不能保持粒子能量守恒。然而 VSI 方法模拟的粒子轨道始终比较精确。图 3.1c 画出了两种方法所得的粒子能量随时间的变化，清晰地显示 VSI 方法可在长时间里保持粒子能量守恒，但是 RK4 方法给出的粒子能量的误差逐渐积累。在这个模拟事例中，尽管选取更小步长的 RK4 方法，或用高阶龙格-库塔法，都可以提高计算精度，但是这些方法依然会不断积累数值误差。在这个例子中，VSI 方法还保持粒子的第二绝热不变量 J 守恒，而 RK4 方法不能保持 J 守恒。VSI 的唯一劣势在于，由于它用牛顿迭代求方程的根，它需要更长的 CPU 时间（这个事例中，VSI 方法所用的 CPU 时间是 RK4 方法的 5 倍）。

3.1.3 环电流质子漂移运动模拟

在真实的磁层里，带电粒子的漂移运动是电场漂移和磁场漂移联合作用的结果。 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移与粒子电荷与能量都不相关，但是磁场漂移跟这两者都相关。能量更高的粒子，磁场漂移速度更快。对于 $\sim 100 \text{ keV}$ 以上的带电粒子，磁场漂移占主导，而对于低能粒子，例如 $\sim 1 \text{ eV}$ ，电场漂移占主导，因此冷的电子和离子一起沿着电场等势

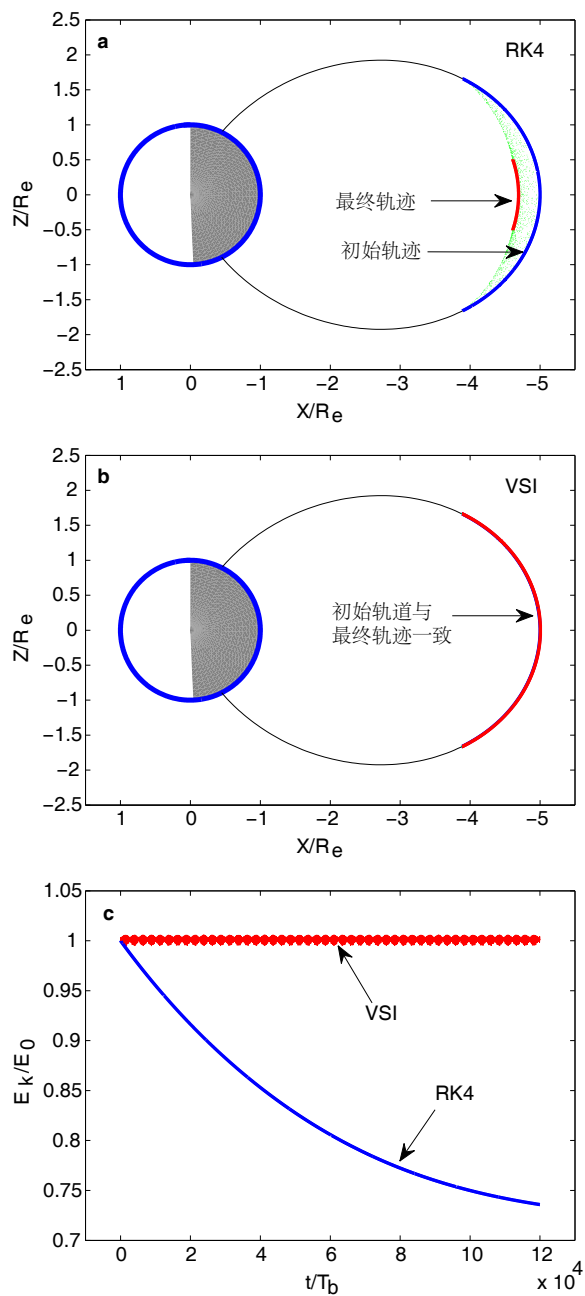


图 3.1 (a) RK4 方法所计算的电子导心轨迹；(b) VSI 方法所计算的导心轨迹。模拟时间为 $1.2 \times 10^5 T_b = 13 h$ ，电子弹跳周期是 $T_b = 0.4 s$ 。(c) VSI 与 RK4 两种方法所得的归一化能量随时间的变化。VSI 方法计算的结果可以长时间保持能量守恒。

线漂移^[81]。这里我们考虑磁层里两个主要电场来源：与磁层对流相关的晨昏对流电场 E_c ，以及跟地球自转相关的共转电场 E_{co} 。我们用 Volland-Stern 模型表示对流电场

$$\Phi_c = -Kr^2 \sin(\phi), \quad (3.21)$$

$$K = \frac{0.045}{(1 - 0.159K_p + 0.0093K_p^2)^3} \text{ kV}/R_E^2. \quad (3.22)$$

这里 ϕ_c 代表对流电场的越尾（cross-tail）电势，单位是 kV， ϕ 是环向角且 $\phi = 0$ 代表指向太阳方向。 K 与 K_p 指数相关，这里我们设定 $K_p = 5.0$ 。共转电场的电势为

$$\Phi_{co} = -\omega_E R_E^3 B_0 / r, \quad (3.23)$$

这里 ω_E 是地球自转的角速度。在磁赤道上电场等势线由图 3.2a-b 绿线所示。我们假设沿磁力线的电导率无穷大，因而非赤道的电势可沿磁力线投射到赤道得到^[82]。在静磁场中，粒子保持纵向积分 J 与磁通 Φ 守恒。其中磁通守恒意味着粒子围绕地球漂移一圈后将回到原来的磁力线上，因而其漂移轨迹是闭合的。低能带电粒子沿着电场等势线漂移，而高能粒子围绕地球漂移，其中离子西向漂移，电子东向漂移。中等能量的质子的漂移轨迹比较复杂，因为共转漂移与磁场漂移的方向相反，因而漂移的方向取决于两个漂移速度谁更大。

与磁声波激发源相关的一个很有趣的现象是，中等能量质子可在昏侧形成香蕉形闭合漂移轨道。我们用 RK4 与 VSI 两种算法分别模拟质子的漂移轨迹，如图 3.2a-b。我们很清晰地看到，VSI 方法给出闭合的漂移轨迹，而 RK4 方法由于没有物理守恒性，给出了一个逐渐萎缩的漂移轨迹。这个事例中质子能量是 4 keV，投掷角为 45°，初始坐标在昏侧(0, 3.5)处，并用 A 标示。这里坐标的单位是地球半径 R_e 。起初，共转电场占主导，质子随地球一起向东漂移。当质子运动到 B 点时，共转与磁场漂移正好抵消，但对流电场的效应使质子向太阳方向漂移。因而质子大致朝太阳方向漂移，且靠近地球。当磁场漂移占主导时，质子又向西漂移。VSI 方法计算的粒子运动结果显示粒子的能量、第二绝热不变量，以及磁通都保持守恒。然而，RK4 方法给出的数值结果导致总能量与纵向积分量 J 迅速地衰减，如图 3.2c 与 d 显示。这里粒子总能量包括其动能以及由方程 (3.21) 与 (3.23) 给出的电势能。RK4 方法的巨大误差积累是因为在 C 点附近质子的弹跳周期相比在 A 点小得多，而积分步长始终不变。自适应步长的 RK4 方法能给出更好的计算结果，但在长时间模拟中，误差也将不可避免地积累。

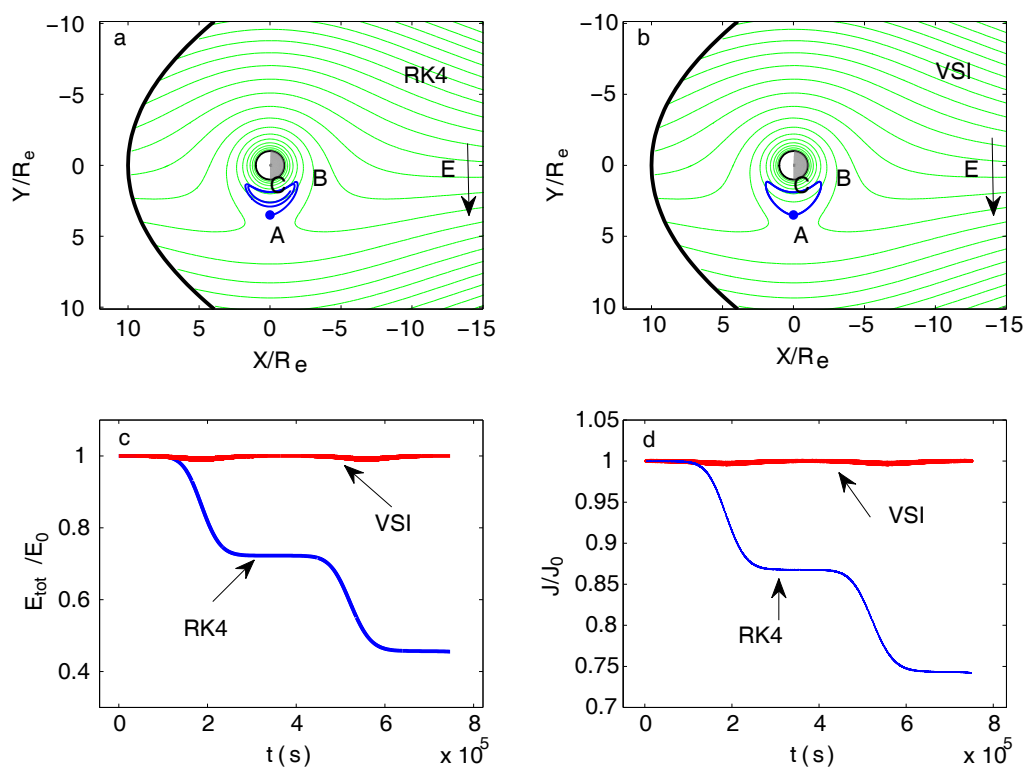


图 3.2 一个 4 keV、 45° 投掷角的质子在地球磁场、对流电场与共转电场作用下的漂移轨迹模拟。(a) RK4 方法计算的导心漂移运动轨迹在磁赤道面上的投影，粒子导心轨迹沿磁力线投射到赤道面；(b) VSI 方法计算的漂移轨迹；(c) 两种算法所计算的归一化能量 E/E_0 随时间的变化；(d) 两种算法所计算的归一化第二绝热不变量 J/J_0 随时间的变化。质子初始坐标在昏侧 (0, 3.5)，即 A 点。两种算法的步长都为 0.6 秒，弹跳周期在 A 点为 90 s，在 C 点为 21 s。总积分时长为 8.7 天，为香蕉形轨道周期的 2 倍。

3.2 波对粒子共振作用的试验粒子模拟

试验粒子模拟是研究磁层中电磁波动对粒子作用的重要方法，它即可研究线性相互作用，也可研究非线性相互作用。带电粒子在电磁场中的运动由洛伦兹方程描述，我们可以直接积分洛伦兹力模拟粒子的运动（例如 Tao 等人的工作^[83]）。但是这将消耗大量的计算资源与时间，并且一般会迅速积累数值误差。我们考虑波对粒子的共振作用，对粒子运动方程做回旋平均，不仅可给模拟计算带来很大方便，还有助于我们物理上理解波对粒子作用的机制。

Bell 等人^[84]首次给出粒子在与斜传播的哨声模电磁波回旋共振中的一般运动方程，之后 Ginet and Albert^[85] 与 Bortnik^[86] 给出了相对论形式的公式。然而，最近我们发现 Bortnik 等人的公式中粒子垂直运动有一个符号问题，它使得模拟磁声波对电子作用中产生严重错误。在本论文中，我们给出试验粒子模拟波粒共振作用的详细推导过程，并提出可有效检查各种不同约定下都适用的自恰的符号检验方法：通过共振粒子的动量方程给出的粒子能量变化不应含磁场波动项，因为磁场不直接改变粒子能量。此外，我们提出，波动向心加速力效应对非线性波粒共振作用有显著影响。这个波动向心加速力非常小，从前常常被忽略。我们指出这一项有显著的随时间导数，从而提供相位捕获额外的“驱动力”，使更多粒子捕获在非线性共振作用中。此外，这个力还可以把小投掷角粒子弹出损失锥。本论文中我们用波粒相互作用的事例证实上述符号问题与波动向心加速效应的重要性，将回旋平均的模拟结果与直接积分洛伦兹力的全粒子运动进行了比较。我们改进后的公式与直接积分洛伦兹力的模拟结果精确吻合。

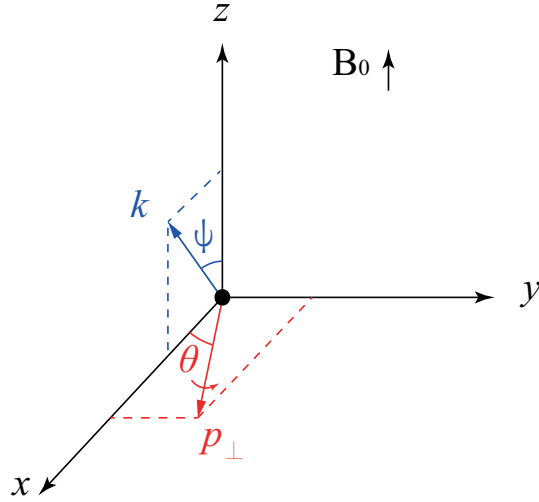
波对粒子共振作用的试验粒子模拟公式被广泛用于辐射带研究中^[62,83,87-94]。由于研究者对粒子和波动诸参数采用各不相同的约定，本论文也总结了前人公式的符号差异（见附录A）。

3.2.1 哨声模波动模型

我们选取一个笛卡尔坐标系，使 z 轴为沿背景磁场方向，并使得单色哨声模波动在 xz 平面传播，传播角（传播方向与 z 轴夹角）为 ψ ，如图 3.3 所示。单色电磁波可表达为

$$\mathbf{B}^w = \mathbf{B}_0^w e^{i\Phi}, \quad \mathbf{E}^w = \mathbf{E}_0^w e^{i\Phi}, \quad (3.24)$$

这里 $\Phi = \omega t - \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}$ 是波动相位，波动传播角为 ψ ，波数矢量为 $\mathbf{k} = (k_\perp, 0, k_\parallel)$ ，这里 $k_\perp = k \sin \psi$ ， $k_\parallel = k \cos \psi$ 。波动的电磁各分量的比例可通过冷等离子体的色散关


 图 3.3 波动传播方向和电子垂直动量 $\mathbf{p}_\perp$.

系得到^[95]。对于地球内磁层中的哨声模波动，冷等离子体理论是足够的近似^[96]。磁场波动与电场波动的实数形式为

$$\mathbf{B}^w = \mathbf{e}_x B_x^w \cos \Phi + \mathbf{e}_y B_y^w \sin \Phi + \mathbf{e}_z B_z^w \cos \Phi, \quad (3.25a)$$

$$\mathbf{E}^w = \mathbf{e}_x E_x^w \sin \Phi + \mathbf{e}_y E_y^w \cos \Phi + \mathbf{e}_z E_z^w \sin \Phi. \quad (3.25b)$$

给定磁场波动的总振幅 B_{tot}^w ，则 $\mathbf{E}_0^w$ 与 $\mathbf{B}_0^w$ 的各分量可由冷等离子体的色散关系得到，如本论文1.2.3节所描述。上述波动形式采取了一般的形式，但是与相关的诸多文献采用了不同约定^[84–86,94,97,98]。前人的文章对 ψ 与 Φ ，甚至 z 轴正方向，平行波数 $k_\parallel$ 和平行动量 $p_\parallel$ 的正方向的约定都各有不同，这给新进入这个领域的研究者们带来很多麻烦，使读者对其中符号的判定带来极大困惑。我们在附录 A 中对诸多不同的约定做了较全面的总结。

3.2.2 粒子在回旋坐标($\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\perp, \mathbf{e}_\theta$) 中的运动

在电磁波动场中电子运动的洛伦兹方程为

$$\dot{\mathbf{p}} = -e \left[\mathbf{E}^w + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times (\mathbf{B} + \mathbf{B}^w) \right]. \quad (3.26)$$

这里电场和磁场波动由方程 (3.25) 给出。虽然我们可以直接积分洛伦兹力方程得到粒子的运动，然而，对电子运动做回旋平均在数值模拟中更方便，这样我们可以取与回旋周期相当的积分步长。而且，回旋平均公式更能体现波粒共振相互作用的物理意义。在回旋坐标系，洛伦兹方程(3.26) 可分解为三个正交方向

$$\dot{p}_{\parallel} = -e \left[\mathbf{E}^w + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times (\mathbf{B}^w + \mathbf{B}) \right] \cdot \mathbf{e}_z, \quad (3.27a)$$

$$\dot{p}_{\perp} = -e \left[\mathbf{E}^w + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times (\mathbf{B}^w + \mathbf{B}) \right] \cdot \mathbf{e}_{\perp}, \quad (3.27b)$$

$$\dot{p}_{\theta} = -e \left[\mathbf{E}^w + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times (\mathbf{B}^w + \mathbf{B}) \right] \cdot \mathbf{e}_{\theta}. \quad (3.27c)$$

这里, $p_{\parallel}$ 和 $p_{\perp}$ 分别代表粒子的平行动量与垂直动量, $\dot{p}_{\theta}$ 代表导致粒子回旋运动的回旋加速力, 且 $\mathbf{e}_{\theta}$ 指向引导中心, 如图 (3.4) 所示。应用以下关系 $\mathbf{e}_z \times \mathbf{p} = p_{\perp} \mathbf{e}_{\theta}$, $\mathbf{e}_{\perp} \times \mathbf{p} = -p_{\parallel} \mathbf{e}_{\theta}$ 与 $\mathbf{e}_{\theta} \times \mathbf{p} = p_{\parallel} \mathbf{e}_{\perp} - p_{\perp} \mathbf{e}_z$, 以及 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$, 电子在各方向上的运动为

$$\dot{p}_{\parallel} = -e \mathbf{E}^w \cdot \mathbf{e}_z - \frac{e p_{\perp}}{\gamma m} (\mathbf{B}^w + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_{\theta}, \quad (3.28a)$$

$$\dot{p}_{\perp} = -e \mathbf{E}^w \cdot \mathbf{e}_{\perp} + \frac{e p_{\parallel}}{\gamma m} (\mathbf{B}^w + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_{\theta}, \quad (3.28b)$$

$$\dot{p}_{\theta} = -e \mathbf{E}^w \cdot \mathbf{e}_{\theta} - \frac{e p_{\parallel}}{\gamma m} (\mathbf{B}^w + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_{\perp} + \frac{e p_{\perp}}{\gamma m} (\mathbf{B}^w + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_z. \quad (3.28c)$$

我们先对粒子的绝热运动做回旋平均。绝热运动是由背景磁场 $\mathbf{B}$ 的不均匀性产生的“磁镜力”所造成, 我们把背景磁场做一阶分解 $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z + \mathbf{B}_{\perp}$ 。这里 B 代表磁场强度, 垂直磁场分量 $\mathbf{B}_{\perp}$ 可做 Taylor 展开

$$\mathbf{B}_{\perp} = \mathbf{e}_x \frac{\partial B}{\partial x} \rho \sin \theta - \mathbf{e}_y \frac{\partial B}{\partial y} \rho \cos \theta, \quad (3.29)$$

这里粒子的回旋相位 θ 定义为 x 轴与 $\mathbf{p}_{\perp}$ 的夹角, $\rho = p_{\perp}/eB$ 是粒子回旋半径。这里我们舍去 $\epsilon \sim \rho/R_E$ 的二阶项, R_E 是地球半径。上述方法忽略了背景磁场的梯度漂移与曲率漂移。应用方程 (3.29) 以及 $\mathbf{e}_{\theta} = (-\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y)$, 我们可得

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_{\theta} = -\frac{\partial B}{\partial x} \rho \sin^2 \theta - \frac{\partial B}{\partial y} \rho \cos^2 \theta. \quad (3.30)$$

对上述公式做回旋平均并应用高斯定理 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 得到

$$\langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_{\theta} \rangle = \frac{\rho}{2} \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (3.31)$$

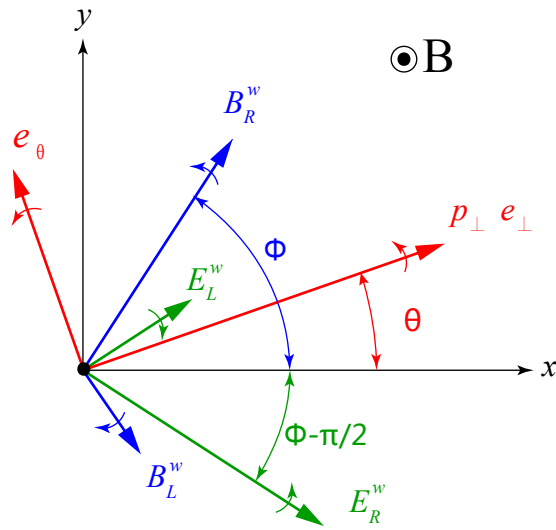


图 3.4 斜传播哨声波相位与粒子垂直动量的相位示意图。 $\mathbf{B}_R$, $\mathbf{B}_L$, $\mathbf{E}_R$ 和 $\mathbf{E}_L$ 的波动相位分别见图所示。

这里尖括号 $\langle \rangle$ 代表对回旋运动做平均。同样的，由 $\mathbf{e}_\perp = (\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y)$ 可得

$$\langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\perp \rangle = 0.$$

因此，粒子在三个方向上的绝热运动为

$$\dot{p}_\parallel^{ad} = -\frac{1}{2B} \frac{p_\perp^2}{\gamma m} \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (3.32a)$$

$$\dot{p}_\perp^{ad} = \frac{1}{2B} \frac{p_\perp p_\parallel}{\gamma m} \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (3.32b)$$

$$\dot{p}_\theta^{ad} = \frac{eB}{\gamma m} p_\perp. \quad (3.32c)$$

3.2.3 粒子在共振过程中的运动

为了应用回旋平均方法，波动的电场与磁场垂直分量都分解为左旋波和右旋波

$$\mathbf{B}_R = B_R[\mathbf{e}_x \cos \Phi + \mathbf{e}_y \sin \Phi], \quad (3.33a)$$

$$\mathbf{B}_L = B_L[\mathbf{e}_x \cos \Phi - \mathbf{e}_y \sin \Phi], \quad (3.33b)$$

$$\mathbf{B}_z = B_z^w \mathbf{e}_z \cos \Phi, \quad (3.33c)$$

$$\mathbf{E}_R = E_R[\mathbf{e}_x \sin \Phi - \mathbf{e}_y \cos \Phi], \quad (3.33d)$$

$$\mathbf{E}_L = E_L[\mathbf{e}_x \sin \Phi + \mathbf{e}_y \cos \Phi], \quad (3.33e)$$

$$\mathbf{E}_z = E_z^w \mathbf{e}_z \sin \Phi, \quad (3.33f)$$

这里 $B_R = (B_x^w + B_y^w)/2$, $B_L = (B_x^w - B_y^w)/2$, $E_R = (E_x^w - E_y^w)/2$ 以及 $E_L = (E_x^w + E_y^w)/2$ 。粒子在波动中的运动为

$$\dot{p}_\parallel^w = -e\mathbf{E}_z \cdot \mathbf{e}_z - \frac{ep_\perp}{\gamma m} (\mathbf{B}_R + \mathbf{B}_L) \cdot \mathbf{e}_\theta, \quad (3.34a)$$

$$\dot{p}_\perp^w = -e(\mathbf{E}_R + \mathbf{E}_L) \cdot \mathbf{e}_\perp + \frac{ep_\parallel}{\gamma m} (\mathbf{B}_R + \mathbf{B}_L) \cdot \mathbf{e}_\theta, \quad (3.34b)$$

$$\dot{p}_\theta^w = -e(\mathbf{E}_R + \mathbf{E}_L) \cdot \mathbf{e}_\theta - \frac{ep_\parallel}{\gamma m} (\mathbf{B}_R + \mathbf{B}_L) \cdot \mathbf{e}_\perp + \frac{ep_\perp}{\gamma m} \mathbf{B}_z^w \cdot \mathbf{e}_z. \quad (3.34c)$$

图 3.4 演示了电场、磁场的相位，以及粒子垂直运动的相位。利用这些相位，我们可得

$$\dot{p}_\parallel^w = -eE_z^w \sin \Phi - \frac{ep_\perp}{\gamma m} [B_R \sin(\Phi - \theta) - B_L \sin(\Phi + \theta)], \quad (3.35a)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_\perp^w &= -eE_R \sin(\Phi - \theta) - eE_L \sin(\Phi + \theta) \\ &\quad + \frac{ep_\parallel}{\gamma m} [B_R \sin(\Phi - \theta) - B_L \sin(\Phi + \theta)], \end{aligned} \quad (3.35b)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_\theta^w &= eE_R \cos(\Phi - \theta) - eE_L \cos(\Phi + \theta) \\ &\quad - \frac{ep_\parallel}{\gamma m} [B_R \cos(\Phi - \theta) + B_L \cos(\Phi + \theta)] + \frac{ep_\perp}{\gamma m} B_z^w \cos \Phi. \end{aligned} \quad (3.35c)$$

真实粒子所在空间坐标上的波动相位为

$$\Phi = \omega t - \int k_\parallel v_\parallel dt - \beta \sin \theta. \quad (3.36)$$

这里 $\beta = k_\perp p_\perp / eB$, $\beta \sin \theta$ 项来自于 $k_\perp x$ 。利用贝塞尔函数的性质

$$e^{i\beta \sin \theta} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta) e^{il\theta} \quad (3.37)$$

我们得到

$$\begin{aligned}
 \sin \Phi &= \Re \left\{ -i e^{i(\omega t - \int k_{\parallel} v_{\parallel} dt - \beta \sin \theta)} \right\} \\
 &= \Re \left\{ -i e^{i(\omega t - \int k_{\parallel} v_{\parallel} dt)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta) e^{-il\theta} \right\} \\
 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta) \sin \eta_l,
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

这里 J_l 代表第一类贝塞尔函数， $\Re$ 表示只取实部。这里

$$\eta_l = \omega t - \int k_{\parallel} v_{\parallel} dt - l\theta \tag{3.39}$$

代表波粒共振相位。同样的，我们还可以得到

$$\sin(\Phi - n\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{l-n}(\beta) \sin \eta_l, \tag{3.40a}$$

$$\cos(\Phi - n\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{l-n}(\beta) \cos \eta_l. \tag{3.40b}$$

通常 $\sin \eta_l$ 与 $\cos \eta_l$ 对时间的积分为 0，除了在 $d\eta_l/dt = 0$ 情况下，或者说

$$\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = l\omega_{ce}/\gamma, \tag{3.41}$$

这里 $\omega_{ce} = eB/m$ 是电子在背景场中的非相对论回旋频率。上述方程正是 l 阶回旋共振条件，即粒子观测到的多谱勒频移后的波动频率是其回旋频率的整数倍数，其中 $l = 0$ 代表朗道共振。

在发生 l 阶共振时，波动对粒子动量的影响为

$$\dot{p}_{\parallel}^w = F_{\parallel}^w \sin \eta, \quad \dot{p}_{\perp}^w = F_{\perp}^w \sin \eta, \quad \dot{p}_{\theta}^w = -F_{\theta}^w \cos \eta, \tag{3.42a}$$

这里

$$F_{\parallel}^w = -e \left[E_z J_l + \frac{p_{\perp}}{\gamma m} B_R J_{l-1} - \frac{p_{\perp}}{\gamma m} B_L J_{l+1} \right], \quad (3.43a)$$

$$F_{\perp}^w = -e \left[E_R J_{l-1} + E_L J_{l+1} - \frac{p_{\parallel}}{\gamma m} B_R J_{l-1} + \frac{p_{\parallel}}{\gamma m} B_L J_{l+1} \right], \quad (3.43b)$$

$$F_{\theta}^w = -e \left[E_R J_{l-1} - E_L J_{l+1} - \frac{p_{\parallel}}{\gamma m} B_R J_{l-1} - \frac{p_{\parallel}}{\gamma m} B_L J_{l+1} + \frac{p_{\perp}}{\gamma m} B_z^w J_l \right]. \quad (3.43c)$$

其中 $F_{\parallel}^w$ 与 $F_{\perp}^w$ 的关系可以简化成（详见附录B）

$$F_{\perp}^w = F_{\parallel}^w \frac{l\omega_{ce}}{\gamma k_{\parallel} v_{\perp}} = F_{\parallel}^w \frac{l\omega_{ce}}{\gamma\omega - l\omega_{ce}} \cot \alpha, \quad (3.44)$$

这里投掷角 α 定义为 $\alpha = \tan^{-1}(p_{\perp}/p_{\parallel})$ 。上述关系与在 $(p_{\parallel}, p_{\perp})$ 平面的共振扩散曲线等价^[99]。

共振相位角的变化为

$$\dot{\eta} = \omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - l\dot{\theta}. \quad (3.45)$$

回旋相位的导数为

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{p}_{\theta}}{p_{\perp}} = \frac{\dot{p}_{\theta}^{ad} + \dot{p}_{\theta}^w}{p_{\perp}} = \frac{\omega_{ce}}{\gamma} - \frac{F_{\theta}^w}{p_{\perp}} \cos \eta. \quad (3.46)$$

最终我们得到在 $(p_{\parallel}, p_{\perp}, \eta)$ 坐标系，在 l 阶共振下电子的回旋平均运动方程

$$\dot{p}_{\parallel} = F_{\parallel}^w \sin \eta - \frac{1}{2B} \frac{p_{\perp}^2}{\gamma m} \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (3.47a)$$

$$\dot{p}_{\perp} = F_{\perp}^w \sin \eta + \frac{1}{2B} \frac{p_{\perp} p_{\parallel}}{\gamma m} \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (3.47b)$$

$$\dot{\eta} = \frac{lF_{\theta}^w}{p_{\perp}} \cos \eta + \omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{\gamma m} - \frac{l\omega_{ce}}{\gamma}. \quad (3.47c)$$

3.2.4 电子能量、投掷角与磁矩的变化

电子在与哨声模电磁波共振时，回旋平均的能量变化可由能量-动量关系直接给出

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{\gamma m} \left(p_{\parallel} \frac{dp_{\parallel}}{dt} + p_{\perp} \frac{dp_{\perp}}{dt} \right), \quad (3.48)$$

代入动量变化方程即得

$$\frac{dE_k}{dt} = -\frac{e}{\gamma m} \left[E_z^w p_{\parallel} J_l(\beta) + E_R p_{\perp} J_{l-1}(\beta) + E_L p_{\perp} J_{l+1}(\beta) \right] \sin \eta. \quad (3.49)$$

这里 E_k 代表电子的动能。方程 (3.49) 右边三项分别代表 $\mathbf{E}_z^w$, $\mathbf{E}_R$ 及 $\mathbf{E}_L$ 三个电场分量的贡献。所有的磁场分量都被抵消。能量变化方程 (3.48) 也可通过扩散曲线方程 (3.44) 简化得

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{\gamma m} \left(p_{\parallel} F_{\parallel}^w \sin \eta + p_{\perp} F_{\parallel}^w \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{k_{\parallel} v_{\perp}} \sin \eta \right), \quad (3.50)$$

即

$$\frac{dE_k}{dt} = F_{\parallel}^w \frac{\omega}{k_{\parallel}} \sin \eta. \quad (3.51)$$

从上而两个方程可知，低频波动 ($\omega \ll \omega_{ce}$) 可通过使粒子的平行能量与垂直能量相互转移，从而有效散射电子，而粒子的净能量增加非常小。这样的例子有电磁离子回旋波 (EMIC) 通过一阶回旋共振对高能电子的散射。

推导粒子的第一绝热不变量 μ 的变化是非常有用的。通过其定义 $\mu = p_{\perp}^2 / 2mB$ 可得

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{p_{\perp} \dot{p}_{\perp}}{mB} - \frac{p_{\perp}^2}{2mB^2} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{p_{\parallel}}{\gamma m}. \quad (3.52)$$

代入 $\dot{p}_{\perp}$ 的方程即得

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{p_{\perp}}{mB} F_{\perp}^w \sin \eta, \quad (3.53)$$

再代入扩散曲线方程 (3.44) 可得

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{lm}{ek_{\parallel}} F_{\parallel}^w \sin \eta. \quad (3.54)$$

电子在与单色电磁波动共振中，平行动量、能量、磁矩之间的关系

$$\frac{dp_{\parallel}^w}{dE_k} = \frac{k_{\parallel}}{\omega}, \quad \frac{d\mu}{dE_k} = \frac{m}{e} \frac{l}{\omega}, \quad (3.55)$$

上述关系适用于所有的共振，这也与 Walker^[100] 及 Albert *et al.*^[93] 等人所给出的结果一致。

利用 $\alpha = \tan^{-1}(p_{\perp}/p_{\parallel})$ ，即可得波粒共振中电子的投掷角变化

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{m}{p^2 k_{\parallel}} \sin \eta (p_{\parallel} F_{\perp}^w - p_{\perp} F_{\parallel}^w) + \frac{p_{\perp}}{2\gamma m B} \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (3.56)$$

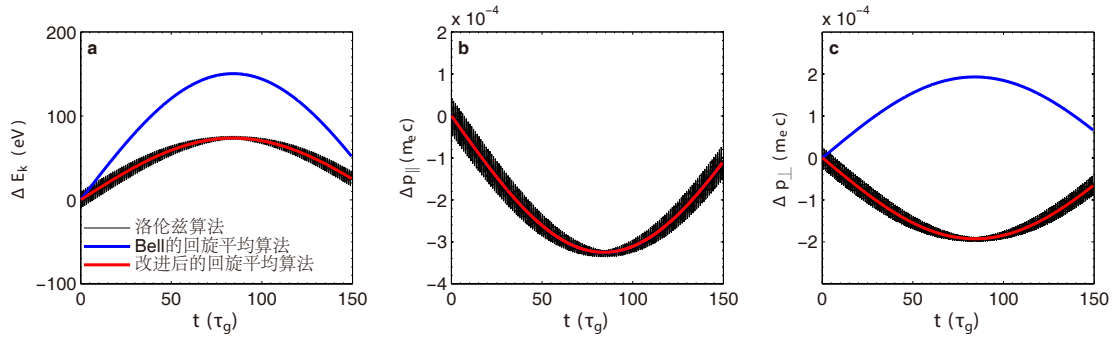


图 3.5 一个单色磁声波对一个电子的接近朗道共振作用的试验粒子模拟。回旋平均算法、Bell (及 Bortnik) 回旋平均算法, 以及改进后的算法所计算的结果比较。(a) 粒子能量变化, (b) 平行动量变化, 以及 (c) 垂直动量的变化。垂直动量变化显示 Bell 算法的符号差错, 并导致能量变化的差错。

同样的, 应用共振关系 (3.41) 与扩散曲线方程 (3.44), 即得

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{F_{||}^w}{p_{\perp}} \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{lY - 1} \right) \sin \eta + \frac{p_{\perp}}{2\gamma m B} \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (3.57)$$

这里 $Y = \omega_{ce}/\gamma\omega$ 。上述方程与 Bortnik *et al.*^[92] 在他的约定中所给的公式一致。

3.2.5 与 Bell 公式的比较：符号问题

我们细心地将粒子在共振中的回旋平均运动方程 (3.47) 转化到 Bell 与 Bortnik 的约定中 (其中相对论形式由 Bortnik^[62,86] 给出), 发现我们的结果与他们的方程中电子垂直运动有一个 $(-1)^{l-1}$ 项的差别。由于在诸多文献中使用各种不同约定, 查验符号问题是非常复杂的 (在附录中, 我们对相关文献中各物理量符号的约定做了一个总结)。我们给出一个与约定无关的自恰的查验方法, 即无论用什么约定, 由方程 (3.48) 给出的能量变化不应含任何波动磁场分量, 因为磁场对粒子能量的改变没有直接贡献。然而 Bortnik^[62,86] 的公式给出的能量方程中含有磁场波动, 而加一个 $(-1)^{l-1}$ 项到垂直运动方程中, 磁场波动项将在能量变化中全部消除。

为了研究符号问题对电子运动的影响, 我们模拟一个电子在与一个单色磁声波接近朗道共振时的运动。我们展示三种算法的计算结果: Bortnik 回旋平均算法, 改进后的回旋平均算法, 以及 Lorentz 算法。与 Bortnik *et al.*^[62] 模拟磁声波散射电子类似, 我们模拟一个频率为 $f = 33.3$ Hz, 振幅为 $B^w = 250$ pT 以及传播角为 89° 的单色平面波。背景等离子体密度设定为 $n_{e0} = 10.3$ cm⁻³, 我们选取在 $L=4.5$ 处的磁场强度作为背景磁场, 即 $B_0 = 342$ nT。我们模拟了这个磁声波与一个能量为 $E_k = 300$ keV, 投掷角为 $\alpha = 30^\circ$ 的电子的接近朗道共振相互作用, 图 (3.5) 展示了这个电子的能量、平行动量、垂直动量的变化。Bortnik 的公式由于缺失 $(-1)^{l-1}$ 项, 得到的粒子垂直动量

变化与真实解正好相反，而改进后的公式得到与用 Lorentz 算法模拟的全粒子运动精确吻合的结果。

我们详细推导了斜传播的哨声模电磁波与带电粒子任意阶共振相互作用的试验粒子运动公式。通过转化到 Bell^[84] 与 Bortnik^[86] 的规定中，我们发现它们公式中垂直运动的符号问题，并指出这个符号问题可带来的严重计算错误。由于从前各文献中不同物理量符号规定的复杂性，我们提出与符号规定无关的自恰的公式检验：粒子的能量运动不应含有磁场波动项。利用这个自恰检验方法，通过仔细比较从前文献中的公式，我们认为，Ginet and Albert^[85] 以及 Albert *et al.*^[93] 给出的共振公式是正确的。

3.2.6 波对粒子的非线性作用：向心加速力对相位捕获的影响

波动向心加速力 F_θ^w 效应（方程 3.47c 右边第一项）在共振公式中常被忽略^[84-86,94]。通常这一项在方程 (3.47) 右边是一个小量（不过在损失锥中、具有很小 $p_\perp$ 的粒子除外^[97,101-104]）。然而在非线性相位捕获中^[25]，这个向心加速力有重要影响。一些文献^[87,89]考虑了这一项的效应，但在一般的理论研究中并没有加入这一项^[22-26,84,93,94]。

相位捕获的粒子的运动不是由背景磁场主导，而是由波动场的影响占据主导^[94,105]，这使得粒子在运动过程中，平行速度一直跟共振速度^[22]一致。这种非线性相互作用被认为是地球辐射带和声波的激发来源^[22-26]。为了得到简单的物理，我们以一个简化的模拟为例，显示波动向心加速力对相位捕获的效应。在一个非相对论电子与平行传播的单色波一阶共振相互作用，粒子回旋平均的运动可简化为

$$\dot{v}_\parallel = -\frac{eB_R}{m}v_\perp \sin \eta - \frac{1}{2B}v_\perp^2 \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (3.58a)$$

$$\dot{v}_\perp = -\frac{eB_R}{m} \frac{\omega_{ce}}{k_\parallel} \sin \eta + \frac{1}{2B}v_\perp v_\parallel \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (3.58b)$$

$$\dot{\eta} = \frac{-eB_R}{m} \frac{\omega_{ce}}{k_\parallel v_\perp} \cos \eta + \omega - k_\parallel v_\parallel - \omega_{ce}. \quad (3.58c)$$

这里我们应用了法拉第定理以及共振公式 (3.41)。如果忽略向心加速力 F_θ^w ，相位变化的二阶导数为

$$\ddot{\eta} + R \sin \eta = D, \quad (3.59)$$

它类似于有外力驱动的单摆运动，

$$\begin{aligned} R &= -\frac{eB_R}{m} \cdot k_{\parallel} v_{\perp}, \\ D &= \left(k_{\parallel} \frac{1}{2B} v_{\perp}^2 - \frac{ev_{\parallel}}{m} \right) \frac{\partial B}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

分别代表“恢复力 (restoring force)”和“驱动力 (driving force)”。当“恢复力” R 大于“驱动力” D 时，粒子将发生相位捕获。然而，考虑波动向心加速效应将产生额外的“恢复力”，其中包括一个主要项

$$R_1 = \frac{-eB_R}{m} \frac{\omega_{ce}}{k_{\parallel} v_{\perp}} \omega. \quad (3.61)$$

当 $R_1 > R$ 时，或者等价地当

$$\omega_{ce} \omega > k_{\parallel}^2 v_{\perp}^2 \quad (3.62)$$

时，这个额外的恢复力可增强相位捕获效应，使更多粒子的相位被稳定捕获。

由方程 (3.62) 可知，当一个具有较小 $v_{\perp}$ 的粒子与高频波动共振时，波动向心加速对相位捕获的作用最明显。我们以一个在 $L=5$ 处，频率为 $\omega = 0.7 \omega_{ce}$ 的合声波对一群电子共振作用为例。假设单色合声波在赤道附近激发并向南半球传播，其振幅为 70 pT。背景等离子体密度为 $n_{e0} = 10 \text{ cm}^{-3}$ 。我们模拟一组 360 个电子向北运动，它们的能量都为 $E_k = 1 \text{ keV}$ ，投掷角为 $\alpha_{eq} = 20^\circ$ ，而初始共振相位 η_0 分别为从 0° 到 359° 。图 3.6 画出 12 个代表性电子的能量随纬度的变化，其相位为 $\eta_0 = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 330^\circ$ 。图 3.6a-c 分别为忽略 F_{θ}^w 效应的结果，考虑 F_{θ}^w 效应的结果，以及全粒子模拟的结果。图 3.6d-f 为三种算法给出的所有粒子在共振后能量的变化。当忽略波动向心加速效应时，只有 68 个粒子发生相位捕获，而考虑这个效应时，有 212 个粒子发生相位捕获 ($\eta_0 = 76^\circ - 287^\circ$)，这与直接积分洛伦兹力模拟的结果非常吻合。

回旋平均算法如果忽略波动向心加速效应，还可能产生负的投掷角，如图 3.7a 所示。这里模拟的是一组 1 keV， 5° 投掷角的电子在波场中的运动。考虑这个 F_{θ}^w 效应，算法给出与洛伦兹算法非常一致的结果(图 3.7b-c)。这是因为，在波动向心加速项的分母里有一个 $p_{\perp}$ 因子，这保证 $p_{\perp}$ 与投掷角 $\alpha = \text{atan}(p_{\perp}/p_{\parallel})$ 一直为正。这个波动向心力不仅“反射”进入损失锥的粒子，并且使得这个事例中所有粒子都发生相位捕获。

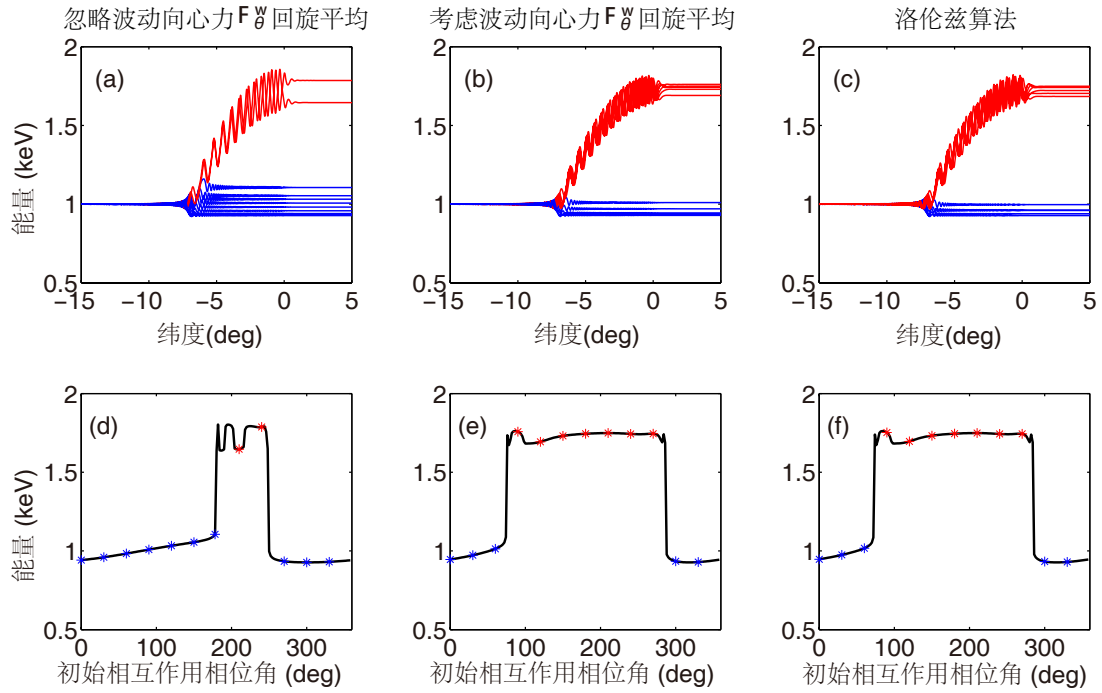


图 3.6 (a-c) 三种算法模拟的 12 个代表性电子在与合声波共振中的能量变化，电子的能量为 $E_k = 1$ keV，投掷角为 $\alpha_{eq} = 20^\circ$ 。(d-f) 三种算法得到的电子最终能量与初始相位的关系。

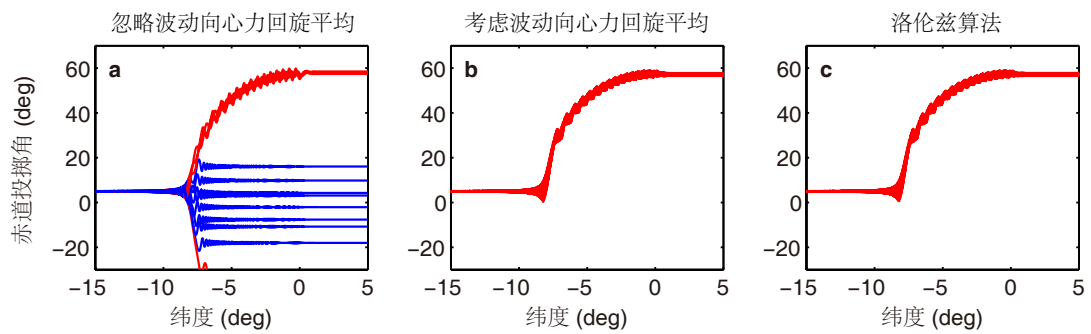


图 3.7 (a-c) 三种方法模拟的 12 个代表性的粒子的投掷角变化。粒子初始能量为 $E_k = 1$ keV，投掷角为 $\alpha_{eq} = 5^\circ$ 。

3.3 小结

本章中，我们发展了变分辛积分算法在磁层物理中的应用，并改进与发展了模拟电磁波对带电粒子共振作用的试验粒子模拟算法。

(1) 我们将变分辛积分算法应用于磁层物理中，长时间模拟带电粒子在空间稳恒场中的导心运动。利用辛积分算法，我们模拟了与磁声波激发相关的环电流质子在昏侧的“香蕉形”漂移轨迹，与传统的龙格-库塔法相比，这种变分辛积分算法具有数值精确性与物理守恒性，适用于长时间模拟带电粒子的导心运动。

(2) 在有电磁波的扰动场中，波和粒子可通过共振交换能量与动量。我们改进并发展了模拟波对粒子作用的试验粒子模拟算法，它可模拟斜传播的哨声模电磁波对电子的朗道共振以及任意阶回旋共振作用。我们指出从前 Bell 与 Bortnik 等人公式具有符号问题，这个符号问题可导致模拟磁声波对电子作用时产生严重错误。我们改进后的公式可正确地分析磁声波对电子作用的机制。由于人们对波和粒子的各项参数有多种不同约定，我们提出了与约定无关的符号检验方法。

(3) 我们还提出波动回旋加速力对非线性共振的重要性。这对将来非线性波粒共振研究有重要意义。

第四章 磁声波对电子作用的机制：朗道共振与 transit-time 效应

这一章我们详细讨论磁声波与电子作用的物理机制。Horne 等人提出垂直传播的磁声波可通过朗道共振加速、散射电子^[60]。对于 CLUSTER 卫星观测到的一个磁声波，他们认为只有 $> 3 \text{ MeV}$ 的电子才有可能与磁声波发生回旋共振，因此回旋共振一般不予以考虑。他们应用准线性理论计算了磁声波对电子作用的扩散系数，结果表明磁声波对电子作用的能量扩散系数与投掷角扩散系数达 $10^{-5} s^{-1}$ ，即磁声波可在 ~ 1 天的时间尺度内将 $\sim 100 \text{ keV}$ 电子加速至 $\sim 1 \text{ MeV}$ 能量。Bortnik 等人提出，由于磁声波集中分布在磁赤道附近，磁声波对电子的作用除了朗道共振之外，还有显著的 transit-time 效应^[62]。他们把磁声波简化为单频率、单传播角的模型，应用试验粒子模拟计算了磁声波对电子作用的扩散系数。他们的结果显示，非朗道共振的粒子也可被磁声波散射与加速。

本章首先将试验粒子模拟方法推广至宽频磁声波对电子作用的模拟，并细致地考察了磁声波对电子的朗道共振与 transit-time 加速的物理过程。针对 CLUSTER 卫星观测的一个磁声波，我们计算它与电子作用的扩散系数，通过比较准线性理论与试验粒子模拟这两种方法的结果，得出在什么情况下朗道共振起主导作用，在什么情况下有显著的 transit-time 效应。由于准线性理论只考虑波粒共振的效应，无法量化 transit-time 效应，我们也给出准线性理论对磁声波散射电子的适用条件。

4.1 宽频磁声波对电子的作用的试验粒子模拟

经典的准线性扩散理论（Quasi-linear diffusion theory, QLT）^[106]是研究辐射带波粒相互作用的重要方法。准线性理论为模拟合声波^[29,107–109]、嘶声^[109–111]对电子作用提供了可行的方法。如第一章所述，准线性理论的一个基本假设是：波粒相互作用时间尺度显著比波动周期长，或者波粒相互作用的空间长度显著长于平行波长，即波场在平行于磁力线方向可传播足够多的波长，从而波和粒子只通过共振交换能量与动量，非共振的效应平均为零。然而磁声波集中分布在磁赤道附近，其传播方向与背景磁场接近垂直，因此，沿磁力线方向不能传播足够多个波长^[62]，从而超越了准线性理论的假设范围。因此传统的波粒相互作用准线性理论对研究磁声波与电子的相互作用有很大局限性，有必要用试验粒子方法模拟磁声波对电子的作用的扩散系数。

4.1.1 单色磁声波对电子作用的模拟

对于典型的磁声波，由于它的高度斜传播（接近垂直）特性，传播角 ψ 接近 90° ，其 $k_{\parallel} = k \cos \psi$ 比较小（平行波长 $\lambda_{\parallel}$ 通常比较长）。Horne 等人分析 CLUSTER 卫星观测到的一个典型的磁声波，发现它只能通过朗道共振与电子发生作用，因为发生一阶回旋共振要求电子能量在 3 MeV 以上^[60]。因此我们模拟磁声波与电子相互作用，只考虑朗道共振，试验粒子的运动方程组简化为

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\parallel}}{dt} &= -\frac{p_{\perp}^2}{2\gamma m B} \frac{\partial B}{\partial s} + F_{\parallel}^w \sin \eta, \\ \frac{dp_{\perp}}{dt} &= \frac{p_{\perp} p_{\parallel}}{2\gamma m B} \frac{\partial B}{\partial s} + F_{\perp}^w \sin \eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \omega - k_{\parallel} v_{\parallel}, \\ \frac{ds}{dt} &= v_{\parallel} \end{aligned} \quad (4.1)$$

这里

$$\begin{aligned} F_{\parallel}^w &= -e (E_z J_0 - v_{\perp} B_x J_1), \\ F_{\perp}^w &= -e (E_y J_1 + v_{\parallel} B_x J_1). \end{aligned} \quad (4.2)$$

对上述微分方程做积分，就可以得到一个电子在穿越单色磁声波场之后的动量变化。在上一章我们分析过，Bortnik 等人模拟磁声波与电子作用时^[62]，其公式中垂直运动存在符号问题，并对这个符号问题做了澄清。

从上述方程可知，电子动量（包括能量、投掷角）的变化与初始波粒共振相位相关。根据波粒共振相位角的定义，朗道共振中的共振相位即粒子导心的波动相位。通常我们计算 $N=12$ 个具有相同能量、投掷角，但相位均匀分布在 $[0^\circ, 360^\circ]$ 的电子在波动中的运动，得到每个电子在一次穿越波场后动量和投掷角的变化，则动量扩散系数、投掷角扩散系数、交叉扩散系数分别由下式计算

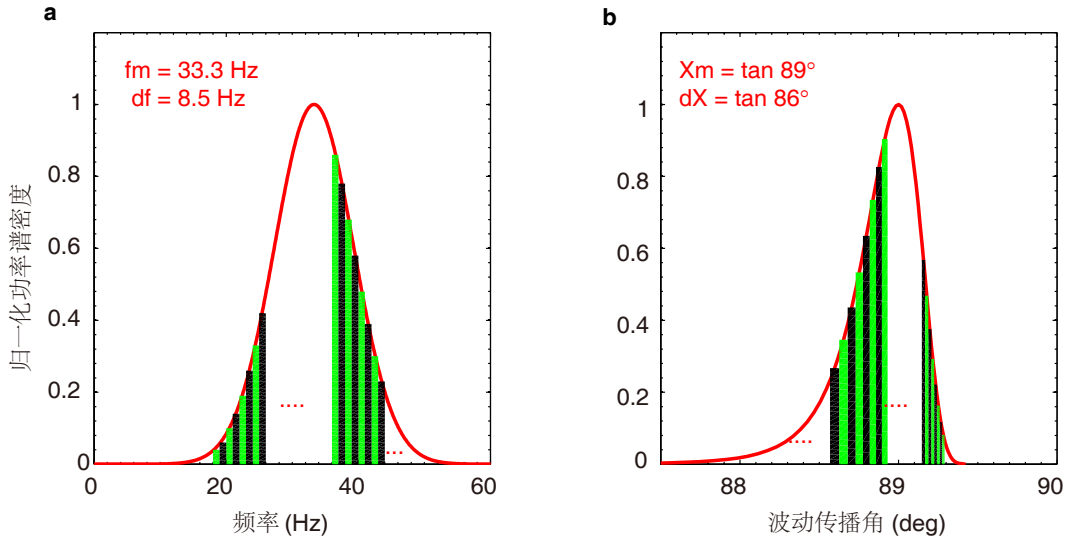


图 4.1 磁声波模型中，磁场功率谱分布与传播角分布分解示意图。波声模型由 100 个分立频率组成，每个频率又分成 100 个传播角，宽频波动为 10000 个单色波叠加。

$$\begin{aligned}
 D_{pp} &= \frac{1}{\tau_b} \sum_{n=1}^N \frac{(\Delta p/p_0)^2}{N}, \\
 D_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{\tau_b} \sum_{n=1}^N \frac{(\Delta \alpha)^2}{N}, \\
 D_{\alpha p} &= \frac{1}{\tau_b} \sum_{n=1}^N \frac{(\Delta p/p_0) \Delta \alpha}{N}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

这里 τ_b 是电子的弹跳周期，近似表达式为 $\tau_b = 0.085L(c/v)(1.30 - 0.56 \sin \alpha_{eq})^{[113]}$ 。动量扩散系数的倒数表征粒子动量发生显著变化的时间尺度，即粒子加速的时间尺度。投掷角扩散系数的倒数表征粒子投掷角散射的时间尺度。

4.1.2 宽带磁声波与电子作用模拟

为模拟多色波与电子的作用，我们先建立宽带多色波模型。以 2002 年 11 月 25 日在一个长的磁暴恢复相期间 CLUSTER 3 卫星观测到的磁声波为例，我们用最小二乘法对卫星在 16:29:36 到 16:32:36 UT 三分钟时间里观测到的磁声波磁场分量做高斯拟合。所得中心频率为 $f_m = 33 \text{ Hz}$ ，高斯宽度为 $\delta f = 8.5 \text{ Hz}$ ，总振幅为 $B_w = 218 \text{ pT}$ 。进一步，我们假设波动强度在正负 3° 以内是均匀分布，在高纬没有磁声波，传播角正切值 $X = \tan \Psi$ 的分布是高斯分布，中心取值为 $X = \tan 89^\circ$ ，高斯宽度为 $\delta X = \tan 86^\circ$ 。

为了做试验粒子模拟，宽带磁声波被离散化成 $N=10000$ 个单色波：100 个频率乘

100 个传播角，如图 4.1 所示。每个波动的频率为 $\omega_{100i+j} = \omega_m + \delta\omega(i - 50)/25$ ，传播角为 $X_{100i+j} = X_m + \delta X(j - 50)/25, i, j = 1, 2, \dots, 100$ 。这里带宽设置得足够小，使得波动功率谱在频率上与传播角上足够密，因而波模之间为非相干，从而穿越于波动场中的电子的行为是随机的。为了保持波动总能量守恒，保持如图 4.1 所示的波谱分布，每个单色波的振幅为

$$B_j^w = \frac{B^w}{625\pi} \exp \left\{ -\frac{(\omega_j - \omega_m)^2}{(\delta\omega)^2} - \frac{(X_j - X_m)^2}{(\delta X)^2} \right\}. \quad (4.4)$$

整个磁声波场模型为所有单色波动的叠加，每个波动表达式为

$$\begin{aligned} B_j^w(\mathbf{x}, t) &= B_{x,j}^w \cos \Phi_j \mathbf{e}_x + B_{y,j}^w \sin \Phi_j \mathbf{e}_y + B_{z,j}^w \cos \Phi_j \mathbf{e}_z, \\ E_j^w(\mathbf{x}, t) &= E_{x,j}^w \sin \Phi_j \mathbf{e}_x + E_{y,j}^w \cos \Phi_j \mathbf{e}_y + E_{z,j}^w \sin \Phi_j \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (4.5)$$

这里 z 轴沿着背景磁场的正方向，波动在 xz 平面内传播，每个波的平行波数为 $k_{\parallel,j} = k_j \cos \Psi_j$ ，垂直波数为 $k_{\perp,j} = k_j \sin \Psi_j$ 。波动磁场与电场的每个分量由冷等离子体的色散关系得到^[61]，如本论文 1.2.3 节所述。每个波动的相位分别是 $\Phi_j = \omega_j t - \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} + \Phi_{j0}$ ，这里 Φ_{j0} 代表随机选取的初始相位。电子在与磁声波朗道共振过程中的运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\parallel}}{dt} &= -\frac{p_{\perp}^2}{2\gamma m B} \frac{\partial B}{\partial z} - \sum_{j=1}^N e \left(E_{z,j} J_0 - v_{\perp} B_{x,j} J_1 \right) \sin \eta_j, \\ \frac{dp_{\perp}}{dt} &= \frac{p_{\perp} p_{\parallel}}{2\gamma m B} \frac{\partial B}{\partial z} - \sum_{j=1}^N e \left(E_{y,j} J_1 + v_{\parallel} B_{x,j} J_1 \right) \sin \eta_j, \\ \frac{d\eta_j}{dt} &= \omega - \frac{k_{\parallel,j} p_{\parallel}}{\gamma m}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{p_{\parallel}}{\gamma m}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

这里贝塞尔函数 J_0 和 J_1 的宗量为 $k_{\perp,j} p_{\perp} / eB$ 。 η_j 代表第 j 个波动与电子的波粒相互作用相位角，对于朗道共振即粒子导心坐标的波动相位。为了用试验粒子模拟方法计算磁声波对电子作用的能量扩散系数 D_{EE} 与投掷角扩散系数 $D_{\alpha\alpha}$ ，对给定能量与投掷角的电子，我们模拟 $M=200$ 个电子的运动，但每个粒子的初始共振相位 Φ_{j0} 是随机选取的。假设电子从南纬 3° 进入波动场，我们通过模拟跟踪它直到北纬 3° ，记录这期间每个粒子的能量与投掷角变化 (ΔE_j 与 $\Delta \alpha_j$)。最终通过下式，计算得该多色磁

声波对电子作用的弹跳平均的扩散系数

$$D_{EE} = \frac{1}{\tau_b} \sum_{j=1}^M \frac{(\Delta E_j/E_0)^2}{M}, \quad (4.7)$$

$$D_{\alpha\alpha} = \frac{1}{\tau_b} \sum_{j=1}^M \frac{(\Delta \alpha_j)^2}{M}, \quad (4.8)$$

$$D_{\alpha E} = \frac{1}{\tau_b} \sum_{j=1}^M \frac{\Delta \alpha_j \Delta E_j / p_0}{M}. \quad (4.9)$$

4.1.3 试验粒子模拟的简化

前面描述的磁声波与电子作用的试验粒子模拟方法是通用方法。利用这种方法的程序运行通常比较繁杂。模拟一介单色波的作用，我们通常需要对 12 个粒子的 ΔE 与 $\Delta \alpha$ 做平均求扩散系数，而如果模拟多色波的效应，则往往需要模拟上百个粒子。在波动强度不大的情况下，磁声波对电子的作用是线性的，即电子的动量（能量）变化与波动振幅成正比。在这种情况下，试验粒子的模拟可以大大简化。为此我们发展了模拟磁声波与电子相互作用的快速方法，它直接模拟能量 E_k 和磁矩 μ 的变化，与通用的波粒共振试验粒子模拟方法相比，它具有如下优势：

- 1) 常微分方程数减少为 3 个。
- 2) 在积分能量 E_k 和磁矩 μ 的变化时，它们的变化只受波动影响，而不受绝热运动影响。相比而言， $p_{\parallel}, p_{\perp}$ 与 α 的变化是绝热运动与波动影响的叠加。
- 3) 给定粒子能量、投掷角，我们可以只对一个粒子运动做积分（不需要对 12 个粒子积分），即可计算出扩散系数。

这种快速方法可显著提高单色波与电子作用的计算效率。计算多波模对粒子的扩散系数，在波动振幅不大的情况下，我们可以利用这个快速方法计算每个单色波模的扩散系数，将它们叠加即得到总扩散系数。不过，这种方法不能用于模拟大振幅波动的非线性效应（但是仍可以模拟出磁声波的 transit-time 效应）。

粒子受磁声波作用下(E, μ)的变化

利用法拉第定理 $B_x = -k_{\parallel} E_y / \omega$ ，我们可以简化方程 (4.2) 中波动垂直力 $F_{\perp}$ 与平行力 $F_{\parallel}$ 的关系

$$F_{\perp} = -e E_y J_1 \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega}. \quad (4.10)$$

应用能量与动量关系 $dE = v dp$ （适用于相对论）与磁矩的定义 $\mu = p_{\perp}^2 / 2mB$ ，由方程

(4.1) 可得到能量与磁矩的变化

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= P^w \sin \eta, \\ \frac{d\mu}{dt} &= Q^w \sin \eta,\end{aligned}\tag{4.11}$$

这里

$$\begin{aligned}P^w &= -e \left[v_{\parallel} E_z J_0 + v_{\perp} E_y J_1 \right], \\ Q^w &= -e E_y \frac{p_{\perp}}{mB} \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} J_1\end{aligned}\tag{4.12}$$

设粒子穿越磁赤道的时刻为 $t=0$ ，相位为 η_0 ，则粒子在给定时刻 t 的相位为 $\eta = \eta_0 + \phi$ ，这里 $\phi = \omega t - \int k_{\parallel} ds$ ， s 代表沿磁力线的长度。很容易知道， $\phi(t) = -\phi(-t)$ ， $P^w(t) = P^w(-t)$ 以及 $Q^w(t) = Q^w(-t)$ 。我们假设波动振幅沿纬度呈以赤道为中心的高斯分布，则粒子在半个弹跳周期里的能量变化为

$$\begin{aligned}\delta E &= \Re \int_{-t_1}^{t_1} P^w e^{-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2} (-i) e^{i(\eta_0 + \phi)} dt \\ &= \Re - i e^{i\eta_0} \int_{-t_1}^{t_1} P^w e^{-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2} e^{i\phi} dt \\ &= \Re - i e^{i\eta_0} \int_0^{t_1} P^w e^{-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2} (e^{i\phi} + e^{-i\phi}) dt \\ &= 2 \sin \eta_0 \int_0^{t_1} P^w e^{-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2} \cos \phi dt\end{aligned}\tag{4.13}$$

类似的，我们得到粒子在半个弹跳周期里磁矩的改变为

$$\delta \mu = 2 \sin \eta_0 \int_0^{t_1} Q^w e^{-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2} \cos \phi dt.\tag{4.14}$$

上述计算过程中应用了下列关系：给定任意偶函数 $f(t)$ 以及一个奇函数 $\phi(t)$ ，我们有

$$\begin{aligned}\int_{-t_1}^0 f(t)e^{i\phi(t)} dt &= -\int_{-t_1}^0 f(-t)e^{-i\phi(-t)} d(-t) \\ &= -\int_{t_1}^0 f(t)e^{-i\phi(t)} dt = \int_0^{t_1} f(t)e^{-i\phi} dt.\end{aligned}\quad (4.15)$$

将自变量转化为纬度

下一步，我们将上述微分方程的自变量由时间 t 改为纬度 λ 。在偶极子场中， $ds = LR_E \cos \lambda \sqrt{1 + \sin^2 \lambda} d\lambda$ ，则

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= v_{\parallel}, \\ \frac{dv_{\parallel}}{dt} &= -\frac{v_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial s}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{v_{\parallel}}{LR_E \cos \lambda \sqrt{1 + \sin^2 \lambda}}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \omega - k_{\parallel} v_{\parallel}.\end{aligned}\quad (4.16)$$

在绝热运动中，粒子沿磁力线运动的长度 s （以磁赤道为0），粒子平行速度 $v_{\parallel}$ 以及回旋半径 ρ 都可以表述为纬度 λ 的函数

$$\begin{aligned}s &= LR_E \left[\frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{asinh}(\sqrt{3} \sin \lambda) + \frac{1}{2} \sin \lambda \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda} \right], \\ v_{\parallel} &= \sqrt{v^2 - \frac{2\mu B(\lambda)}{\gamma^2 m}} = v \sqrt{1 - \frac{B(\lambda)}{B_m}}, \\ v_{\perp} &= \sqrt{\frac{2\mu B(\lambda)}{m\gamma^2}} = v \sqrt{\frac{B(\lambda)}{B_m}}, \\ \rho &= \frac{p_{\perp}}{eB} = \sqrt{\frac{2m\mu}{e^2 B(\lambda)}}.\end{aligned}\quad (4.17)$$

我们定义与初始波粒共振相位无关的 $\tilde{E}$ 与 $\tilde{\mu}$ 两个物理量，使其满足

$$dE = \sin \eta_0 d\tilde{E}, \quad d\mu = \sin \eta_0 d\tilde{\mu}, \quad (4.18)$$

则方程 (4.13) 与 (4.14) 以及相位变化变为

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{E}}{d\lambda} &= 2P^w(\lambda)e^{-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2} \cos\phi \frac{LR_E \cos\lambda \sqrt{1+\sin^2\lambda}}{v_{\parallel}}, \\
 \frac{d\tilde{\mu}}{d\lambda} &= 2Q^w(\lambda)e^{-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2} \cos\phi \frac{LR_E \cos\lambda \sqrt{1+\sin^2\lambda}}{v_{\parallel}}, \\
 \frac{d\phi}{d\lambda} &= \frac{LR_E \cos\lambda \sqrt{1+\sin^2\lambda}}{v_{\parallel}} (\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}).
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

对上述三个常微分方程从 $\lambda = 0$ 到 $\lambda = \lambda_m$ 做积分, 我们得到在半个弹跳周期里的 $\delta\tilde{E}$ 与 $\delta\tilde{\mu}$ 。则对初始波粒共振相位为 η_0 的粒子, 其在半个弹跳周期里能量与磁矩的改变为 $\delta E = \sin\eta_0\delta\tilde{E}$, 以及 $\delta\mu = \sin\eta_0\delta\tilde{\mu}$ 。

计算扩散系数

(1) 计算能量扩散系数与磁矩扩散系数

假设初始波粒相互作用相位 η_0 在 0 和 2π 间均匀取值, 我们利用 $\langle \sin^2\eta_0 = 1/2 \rangle$, 得到磁声波与电子相互作用的能量扩散系数与磁矩扩散系数

$$\begin{aligned}
 D_{EE} &= \frac{1}{\tau_b} \frac{(\delta\tilde{E})^2}{E_0^2} = \frac{1}{2\tau_b} \frac{(\delta\tilde{E})^2}{E_0^2}, \\
 D_{\mu\mu} &= \frac{1}{2\tau_b} \frac{(\delta\tilde{\mu})^2}{\mu_0^2}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

(2) 计算投掷角扩散系数

根据投掷角的定义我们得到

$$\sin^2\alpha = \frac{p_{\perp}^2}{p^2} = \frac{2\mu mB}{(\gamma^2 - 1)m^2c^2}, \tag{4.21}$$

即

$$\begin{aligned}
 2\sin\alpha \cos\alpha d\alpha &= \frac{2B}{mc^2} \left[\frac{d\mu}{\gamma^2 - 1} - \frac{\mu}{(\gamma^2 - 1)^2} 2\gamma d\gamma \right] \\
 &= \frac{2mB}{p^2} d\mu - \frac{4\mu mB}{p^4} m^2c^2 \gamma d\gamma \\
 &= \frac{2mB}{p^2} d\mu - \frac{2p_{\perp}^2}{p^4} \gamma m dE.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

因此，投掷角的变化为

$$d\alpha = \frac{mB}{p_{\perp}p_{\parallel}}d\mu - \frac{\gamma mp_{\perp}}{p^2p_{\parallel}}dE. \quad (4.23)$$

由此得到磁声波与电子作用的投掷角扩散系数的计算式为

$$D_{\alpha\alpha} = \frac{1}{\tau_b}(\delta\alpha)^2 = \frac{1}{2\tau_b} \left[\frac{mB}{p_{\perp}p_{\parallel}}\delta\tilde{\mu} - \frac{\gamma mp_{\perp}}{p^2p_{\parallel}}\delta\tilde{E} \right]^2. \quad (4.24)$$

(3) 计算动量扩散系数

通常，我们还用到动量扩散系数。根据相对论下能量与动量的关系

$$p^2c^2 = (E + mc^2)^2 - m^2c^4, \quad (4.25)$$

得

$$\frac{dp}{p} = \frac{dE}{E} \frac{E + mc^2}{E + 2mc^2}. \quad (4.26)$$

则磁声波与电子作用的动量扩散系数为

$$D_{pp} = D_{EE} \left(\frac{E + mc^2}{E + 2mc^2} \right)^2. \quad (4.27)$$

4.2 准线性理论与试验粒子模拟比较

如前所述，准线性理论为模拟电子与合声波、嘶声相互作用提供了可行的方法。然而，准线性理论假设波动可以传播无穷远，或者波粒作用时间尺度比波动周期长得多^[61]。然而 Bortnik 等人^[62]指出，由于磁声波是高度斜传播，它沿背景磁场的平行波长非常长。此外磁声波还被束缚在赤道附近。因而穿越磁声波场的电子可能只经历不到一个波长，这将导致在一定能量范围的电子都产生 transit-time 效应。

由于真实的磁声波动在频率和传播角上都有很宽分布，我们建立一个由分立的单色波叠加组成的多波模型，以便做试验粒子模拟。为了验证准线性理论对磁声波的有效性，我们用试验粒子方法模拟等离子体层内外的磁声波对电子的散射效应，并与准线性理论模拟的结果做对比。

4.2.1 准线性理论与实验粒子模拟的比较

Kennel 等人^[106]与 Lerche^[112]发展了在 $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ 速度空间的波粒共振作用的准线性理论，Lyons^[114]发展了在投掷角、能量 (α, E) 空间的准线性理论。在上述工作的基础

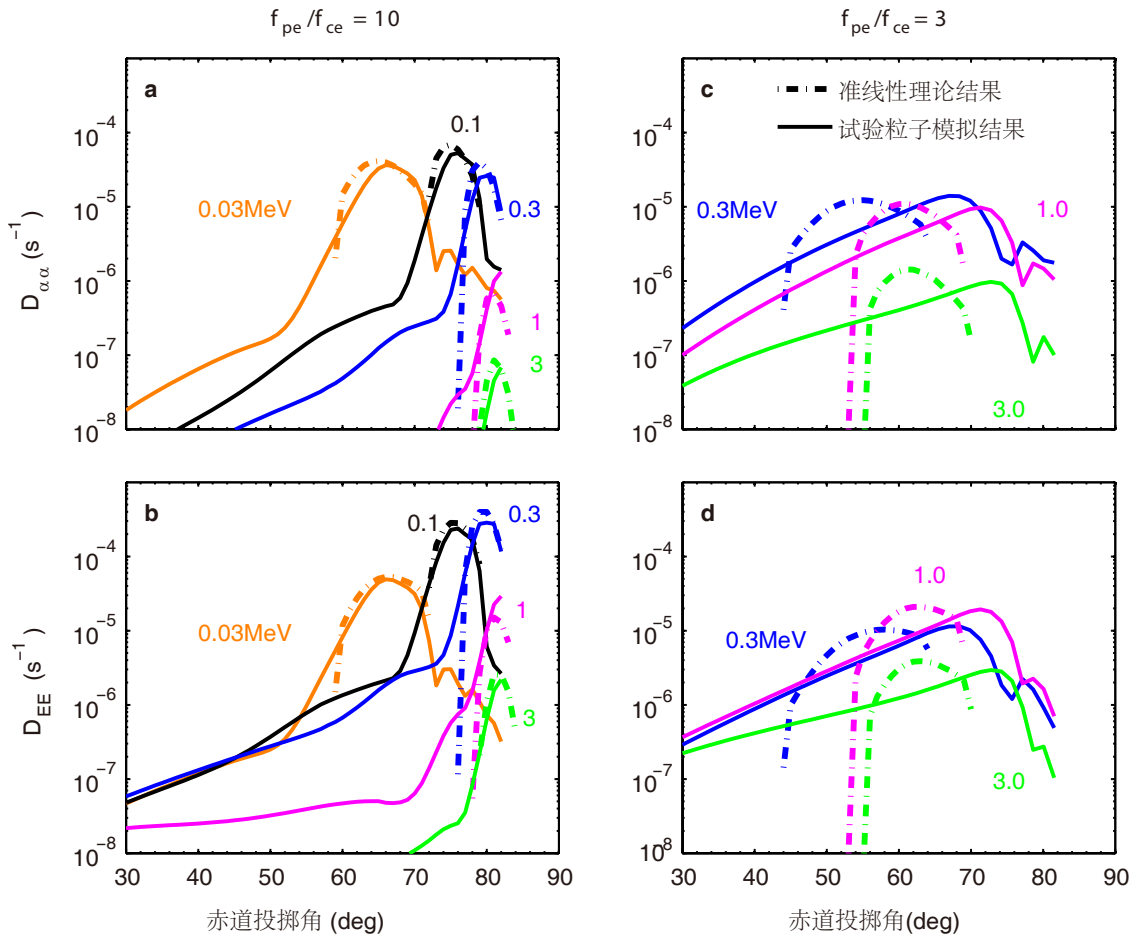


图 4.2 准线性理论模拟（虚线）与试验粒子模拟（实线）磁声波对电子作用的扩散系数的比较。(a-b) 在 $L=4.5$ 处高密度的等离子体层内 ($f_{pe}/f_{ce} = 10$)，磁声波与电子的相互作用的投掷角扩散系数与能量扩散系数。(c-d) 与(a-b)类似，但磁声波位于等离子体层外的低密度区 ($f_{pe}/f_{ce} = 3$)。

之上，Ni 等人发展了 UCLA Full Diffusion Code (FDC)，可计算粒子与宽带电磁波作用的弹跳平均扩散系数^[108,115,116]。

利用 UCLA Full Diffusion Code，和前文中发展的试验粒子模拟方法，本论文计算在 $L=4.5$ 处，典型的等离子体层的等离子体参数 $f_{pe}/f_{ce} = 10$ 情况下，2012 年 11 月 25 日 CLUSTER 观测的磁声波与电子作用的弹跳平均扩散系数。准线性理论计算的结果如图 4.2(a-b) 中虚线所示，试验粒子模拟方法所得到的结果如图中实线所示。对每个选定的能量，准线性理论计算的结果在朗道共振区与试验粒子模拟的结果比较吻合。此外，我们对等离子体层外的磁声波也做了同样的研究，等离子体参数取为 $f_{pe}/f_{ce} = 3$ 。两种方法的比较如图 4.2(c-d) 所示。对等离子体层外的各能量的电子，两种方法给出的扩散系数尽管峰值比较接近，但整体有明显差异。

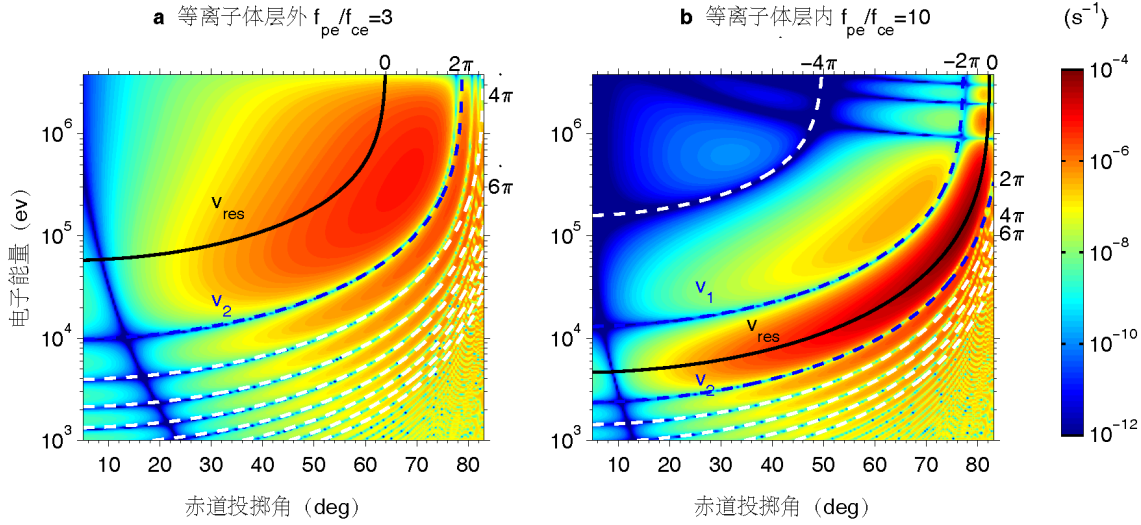


图 4.3 单色磁声波与电子相互作用的能量扩散系数。a) 等离子体层内的磁声波；b) 等离子体层外的磁声波。这里背景磁场为位于 $L=4.5$ 处的偶极子磁场，磁声波频率都为 $f = 33$ Hz，在 3° 以内振幅为 218 pT。图中实线所代表的粒子发生朗道共振，而虚线代表的粒子在穿越波场后相互作用相位变化 2π 的整数倍。在 (E_k, α_{eq}) 空间中电子相位变化在 2π 以内的区域，我们定义为 transit-time 区域。

4.2.2 Transit-time效应

上述的准线性理论与试验粒子模拟的扩散系数的比较产生了一些重要的问题：1) 为什么在等离子体层的高密度区，准线性与试验粒子模拟的结果吻合，但在等离子体层外低密度区却不吻合？2) 为何在等离子体层外低密度区，扩散系数在 (E_k, α_{eq}) 相空间里的峰值发生在朗道共振区之外，更大投掷角区域？

为了回答这个问题，我们简化波动模型为一个单色磁声波，其频率和传播角都为分布函数（如图 4.1 所示）的中间值，即频率为 33 Hz，传播角为 89° ，波动振幅为 218 pT，并且在纬度为 $\pm 3^\circ$ 以内均匀分布。这个单色波与电子作用的能量扩散系数由图 4.3 所示。对于等离子体层内的磁声波，能量扩散系数的峰值在朗道共振线附近（图 4.3a）。而对于等离子体层外的磁声波，扩散系数的峰值在朗道共振之外更大投掷角处（图 4.3b）。此外，两种情况下，扩散系数有一系列极小值，对应于电子在一次穿越波场过程中作用相位变化了 2π 的整数倍。这里我们定义在 (E_k, α_{eq}) 空间中，电子穿越波场过程中朗道共振相位变化 2π 以内的区域为 transit-time 区域。等离子体层外的单色磁声波的 transit-time 区域比等离子体层内磁声波更宽广得多（图 4.3）。这是因为磁声波的典型传播速度接近阿芬速度 $v_A = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho}^{[56]}$ ，因而在磁声波传播到高密度区时，传播速度显著降低；在磁声波频率不变的情况下，其波长也显著变短。因为在等离子体层内的电子在穿越波场时可经历数个波长，transit-time 效应的贡献比较微弱，所以整体上来说，准线性理论与试验粒子模拟的结果比较吻合。

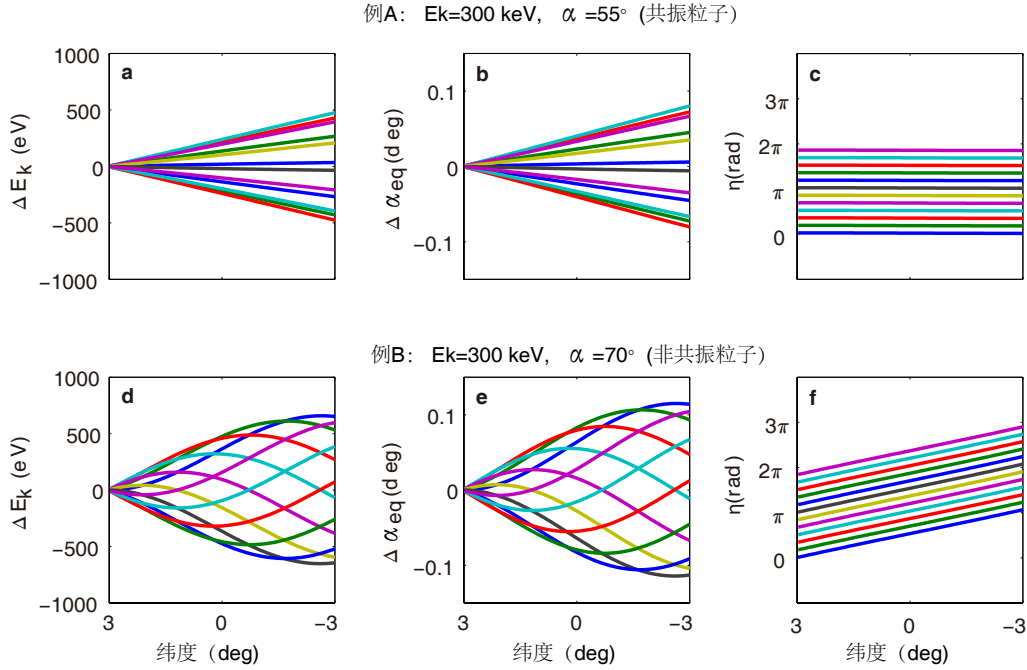


图 4.4 一组 12 个能量为 $E_k = 300 \text{ keV}$, 投掷角为 $\alpha_{eq} = 55^\circ$ 的共振粒子在波动中的能量随纬度的变化(a), 投掷角随纬度的变化(b), 以及相位作用相位随纬度的变化(c)。 (d-f) 与(a-c) 类似, 但是粒子为 $\alpha_{eq} = 70^\circ$ 的非共振粒子。

为了揭示等离子体层外的磁声波的扩散系数峰值不在朗道共振区, 而是在更大投掷角上的原因, 这里本论文模拟在 $L=4.5$ 处 12 个共振粒子的运动, 其初始能量为 $E_k = 300 \text{ keV}$, 投掷角为 $\alpha_{eq} = 55^\circ$, 初始波粒作用相位 η 在 0 到 2π 之间均匀取值。这些电子的能量、投掷角随纬度的变化如图 4.4(a-b) 所示, 波粒作用相位如图 4.4(c) 所示。我们同时模拟磁声波对另外一组非共振粒子的影响, 这些电子有相同能量, 但投掷角为 70° , 模拟结果如图 4.4(d-f) 所示。12 个非共振粒子的波粒作用相位都随时间增长, 但只增长约 π 。根据粒子运动方程 (4.6), 这些非共振粒子的能量与投掷角也会显著变化。另一方面, 电子投掷角越大则平行速度越小, 因而这些粒子在波动中的时间更长。最终, 这些 70° 的非共振粒子比 55° 共振粒子得到更大的加速与投掷角散射。

最后, 为了研究准线性理论对模拟磁声波与电子作用的适用性, 我们提出一个有效的判据。对一个给定的磁声波, 朗道共振速度为 $v_{res} = \omega/k_{\parallel}$, 我们定义 transit-time 的上边界速度 v_1 与下边界速度 v_2 , 分别对应于粒子穿越波场后相互作用相位变化分

别为 -2π 与 2π

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\omega s}{k_{\parallel} s - 2\pi}, \\ v_2 &= \frac{\omega s}{k_{\parallel} s + 2\pi}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

这里 s 代表磁声波沿磁力线的空间长度。我们定义在 (E_k, α_{eq}) 空间里，波粒相互作用相位变化小于 2π 的区域为 transit-time 区域，也就是 v_1 与 v_2 两条速度线包围的区域，如图 4.3 所示。我们认为，当 $v_1/v_2 < 3$ 时，或者 $s > 2\lambda_{\parallel}$ 时，transit-time 区域比较窄。根据这个判据，一个磁声波如果传播角比较小，或在更强的背景磁场中，都有比较短的平行波长 $\lambda_{\parallel}$ ，当这些磁声波在沿磁力线方向可传播 2 个以上 $\lambda_{\parallel}$ 距离时，这些波动的 transit-time 效应会相对比较弱，朗道共振起主导作用。

4.3 小结

本章研究磁声波对电子作用的两种物理机制：朗道共振与 transit-time 效应。通过用准线性理论与试验粒子模拟两种方法计算磁声波对电子作用的扩散系数，并对比两种方法的结果，我们总结在磁声波散射加速电子的过程中，何时朗道共振起主导作用（此时准线性理论适用），何时显著的 transit-time 效应（这种情况下准线性理论不再适用）。

（1）本章我们建立了具有频率与传播角分布的宽带磁声波模型，并且将试验粒子模拟方法推广至模拟具有多频结构、多传播方向分布的磁声波对电子的作用。为提高多波对电子作用模拟的效率，我们发展了一个简化而有效的模拟方法。

（2）我们应用试验粒子模拟方法，模拟了在偶极子场中磁声波对电子作用的扩散系数。通过比较磁声波的试验粒子扩散系数与准线性理论得到的扩散系数，我们发现，对于 $L=4.5$ 处高密度区的磁声波，两种方法给出的结果很吻合；然而对于低密度区磁声波，两种方法给出的结果有明显差别，试验粒子扩散系数的峰值偏离中心朗道共振区，且向更大投掷角偏移。

（3）我们的研究表明，在等离子体层高密度区的磁声波主要通过朗道共振对电子作用。因为高密度区的磁声波的波长较短，在沿磁力线方向可以传播足够多波长，transit-time 效应总体上来说不够显著。

（4）在等离子体层外低的密度区，磁声波对电子的 transit-time 作用显著，粒子在 (E_k, α_{eq}) 空间中有很宽广的 transit-time 区域，在这个区域里的电子在波粒作用中只经历不到一个波长，因而其扩散系数的峰值不在朗道共振区，而在其更大投掷角区

域。

(5) 准线性理论只考虑磁声波对电子的(朗道)共振作用效应。为了判断准线性理论计算磁声波对电子影响的有效性,我们提出了一个与粒子无关的准则。当波动沿磁力线方向传播的距离超过 2 个波长,或者相应的,当朗道共振时间长于两个波动周期时,准线性理论的结果是比较准确的,可以用来计算磁声波对电子作用的扩散系数。

第五章 磁声波与电子的朗道共振效应：高能电子的蝴蝶状分布

上一章指出，磁声波主要通过朗道共振与 transit-time 效应对电子的作用。但是磁声波对电子作用的主要动态效应是什么，一直存在争论。Horne 等人^[60]以及 Bortnik 等人^[62]认为，磁声波可在 ~ 1 天时间尺度里把 ~ 100 keV 电子加速到 ~ 1 MeV 能量。不少人期待磁声波能通过朗道共振对等离子体层内电子的加速起作用。但是 Shprits 等人^[63]发现，磁声波对电子的加速效率很低，远不足以加速辐射带高能电子。此外，由于此前卫星观测的局限，人们对分布在赤道附近的磁声波的探索远不够全面。磁声波对电子作用的主要动态效应就成了迄今尚未解决的问题。

不久前，Zhao^[64,117] 等人通过范阿伦卫星的观测，报导辐射带经常发生的一种奇特现象：内辐射带 ~ 100 keV 高能电子持久地呈现蝴蝶状角向分布（投掷角分布在 90° 为极小值），槽区高能电子在磁暴期间可在数小时时间里快速形成蝴蝶状投掷角分布。从前人们所知道的物理过程都无法解释这种奇特的蝴蝶状分布。本论文分析 2013 年 6 月 29 日磁暴期间的卫星观测，发现磁声波与高能电子蝴蝶状分布同时发生。本论文进一步依据范阿伦卫星的高质量数据，模拟出了在磁声波作用下高能电子形成蝴蝶状分布的动态过程，与粒子观测非常吻合。

通过理论分析，本论文发现磁声波通过朗道共振，使高能电子在平行方向得到加速，从而使 90° 附近投掷角的电子向更小和更大投掷角扩散，形成“蝴蝶状”分布。这种作用使得集中在赤道附近的高能电子分散在中高纬区域。本论文这一发现揭示了磁声波对电子作用的主要动态效应，为内辐射带、槽区与近地外辐射带经常出现的 ~ 100 keV-5 MeV 高能电子蝴蝶状角向分布形成的机制找到了答案。

5.1 槽区与内辐射带电子蝴蝶状角向分布

地球辐射中各种物理作用导致高能电子的不断产生与损失，两者间微妙的不平衡造成高能电子的时空变化^[118]。由于不同投掷角的特定能量电子对外部影响具有不同的响应，电子投掷角的变化为研究辐射带物理过程提供了重要信息。多卫星观测显示，辐射带电子具有三种不同的投掷角分布： 90° 峰值分布，平顶形（pancake）分布，以及蝴蝶状分布（投掷角分布在 90° 为极小值）^[64,117,119–125]。在超低频波的驱动下，电子辐射带向内径向扩散，由于保持第一绝热不变量守恒，投掷角不断增大，近

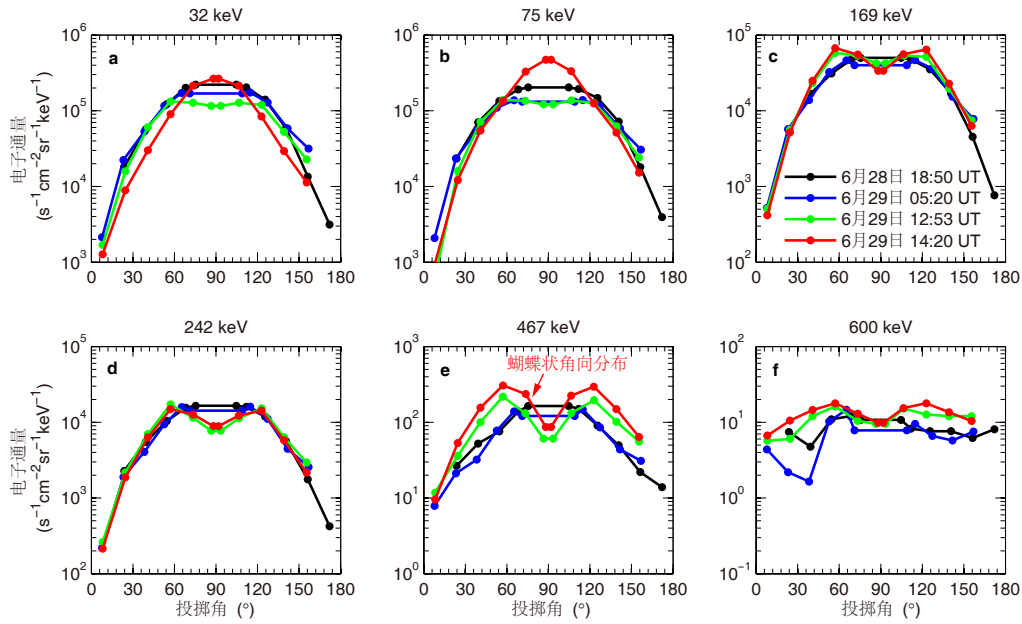


图 5.1 2013 年 6 月 28-29 日，范阿伦卫星 B 上的 MagEIS 仪器在 $L=2.4$ 处测量的各能量段电子的微分通量。32-600 keV 的电子初始都呈现 90° 峰值投掷角分布。在 6 月 29 日 03:50 观测到强磁声波之后，这些电子演化成蝴蝶状投掷角分布。由于在 11:30 UT 左右的亚暴注入，低能（32-75 keV）电子在 14:20 UT 重新转化成 90° 峰值变化。

90° 投掷角的粒子通量增长得比其它粒子快，因而形成 90° 峰值分布，或将初始蝴蝶状分布转化成平顶形分布，并最终在低高度处转化成 90° 峰值分布。由甚低频波与电磁离子回旋波导致的投掷角扩散亦可使 90° 峰值分布变得更明显，因而 90° 峰值分布是最常见到的“正常”分布。

在 2013 年 6 月 28 至 29 日磁暴期间，两颗范阿伦卫星观测到内辐射带与槽区高能电子由正常分布迅速变成蝴蝶状角向分布。图 5.1 展示了 20 个小时里，范阿伦 B 卫星在 $L=2.4$ 的槽区探测的不同能量电子的角向微分通量随时间的动态变化。每幅子图中，黑、蓝、绿、红四色线依次代表从早到晚 4 个时刻（见图所示）的观测值。在 6 月 28 日 18:50 UT，各能量段的电子初始为 90° 峰值分布。本论文利用偶极子场模型，已经把局地投掷角转化为赤道投掷角。18 个小时之后，在 6 月 29 日 12:53 UT，各能量电子都转变为蝴蝶状投掷角分布。最终在 6 月 29 日 14:20 UT，低能电子（32 keV 与 75 keV）由于亚暴注入（从图 5.2a 可知 6 月 29 日 11:00 UT 的 AE 指数达 2500 nT，表明有一个很强的亚暴注入）重新恢复为 90° 峰值分布，而高能电子（ >169 keV）仍然保持蝴蝶状分布。在 $L=2.4$ 区域，能量高于 600 keV 的电子的通量很小，且低于 MagEIS 的噪声阈值，因此没有在这里显示。

图 5.2c-e 展示的是在 2013 年 6 月 29 日 12:30-15:00 UT 期间，MagEIS 仪器测量的辐射带高能电子的角向微分通量动态变化 (c, 169 keV; d, 242 keV; e, 467 keV)。图中可

以看到高能电子从 $L=1.4$ 的内辐射带到 $L=3.2$ 的外辐射带都呈现出显明的蝴蝶状角向分布。

多颗卫星时常观测到外辐射带电子呈现蝴蝶状投掷角分布^[120-125]。外辐射带观测到的蝴蝶状分布通常是由于磁场日夜不对称性导致的漂移壳分裂^[2,122,126,127]效应造成的。由于地球磁场的不对称性， 90° 投掷角电子的漂移轨道在日侧离地心较远，从而更容易从磁层顶损失，导致蝴蝶状分布。漂移壳分裂效应可以解释磁层顶边界附近高 L 壳值处的蝴蝶状分布的起源，然而在 $L<5$ 的区域，尤其是内辐射带与槽区，磁场日侧不对称性比较小，漂移壳分裂与磁层顶屏蔽效应很弱，不能解释在内辐射带长久稳定存在的蝴蝶状分布，也不能解释槽区蝴蝶状分布的快速演化。虽然有人提出在低 L 值高度，有可能在高纬有形成蝴蝶状分布的来源^[123]，但这种机制既没得到观测证实也没有模拟支持。因而在内辐射带与槽区的蝴蝶状分布的起源仍然是一个没有解决的困扰性难题，其起源与机制此前尚不清楚。

5.2 磁声波形成槽区电子蝴蝶状分布的观测依据

图 5.2b 展示了 2013 年 6 月 27 日至 30 日期间，1 分钟精度的 Sym-H 指数（即经向对称环电流扰动指数），是中纬度地磁扰动的水平方向分量，相当于 DST 指数（1 小时精度）。由图 5.2b 可知，27 日 15:00 UT 发生磁暴急始，Sym-H 指数在 29 日 06:00 UT 达最低值 -115 nT，此后磁暴进入恢复相，这个事件中的电子蝴蝶状投掷角分布正发生在磁暴的恢复相期间。上一节提到，图 5.2a 展示标示亚暴注入的 AE 指数，它在 29 日 11:00 UT 达最高值 2500 nT，表明这个时间开始有强亚暴注入。

为探索这些高能电子蝴蝶状分布形成的原因，本论文考察这段期间范阿伦卫星的波动观测。图 5.2f 展示的是高频接收器（High Frequency Receiver, HFR）测量的 10-500 kHz 之间的电场谱，以及上混杂频率 f_{UHR} 与电子回旋频率 f_{ce} 。由于高混杂波频率与背景等离子体密度的变化具有相关性^[72]，可知卫星在 12:37 UT 穿入等离子体层，又在 14:34 UT 穿出等离子体层。图 5.2g 与 5.2h 分别展示了波形接收器（Waveform Receiver, WFR）测量的 10 Hz - 12 kHz 之间的磁场与电场波动功率谱密度，上下两条白色线分别代表低混杂波频率 f_{LHR} 与质子回旋频率 f_{cp} 。图中可以发现一种很强的波动与这些蝴蝶状分布几乎平行地存在，这些波动在磁赤道附近，频率在离子回旋频率 f_{cp} 与低混杂波频率 f_{LHR} 之间。图 5.2i 与图 5.2j 分别展示波动的极化率与传播角，可见这些强波动接近线性极化（极化率接近 0）与垂直传播（传播角接近 90° ）。依据这一系列典型波动特性，我们可以判定为这种强波动为赤道快磁声波。

等离子体层内，这些磁声波分布于广泛的磁地方时（magnetic local time, MLT）与宽广的径向范围。图 5.3 给出了 B 卫星在一个轨道周期（9 个小时）前，03:30-06:00

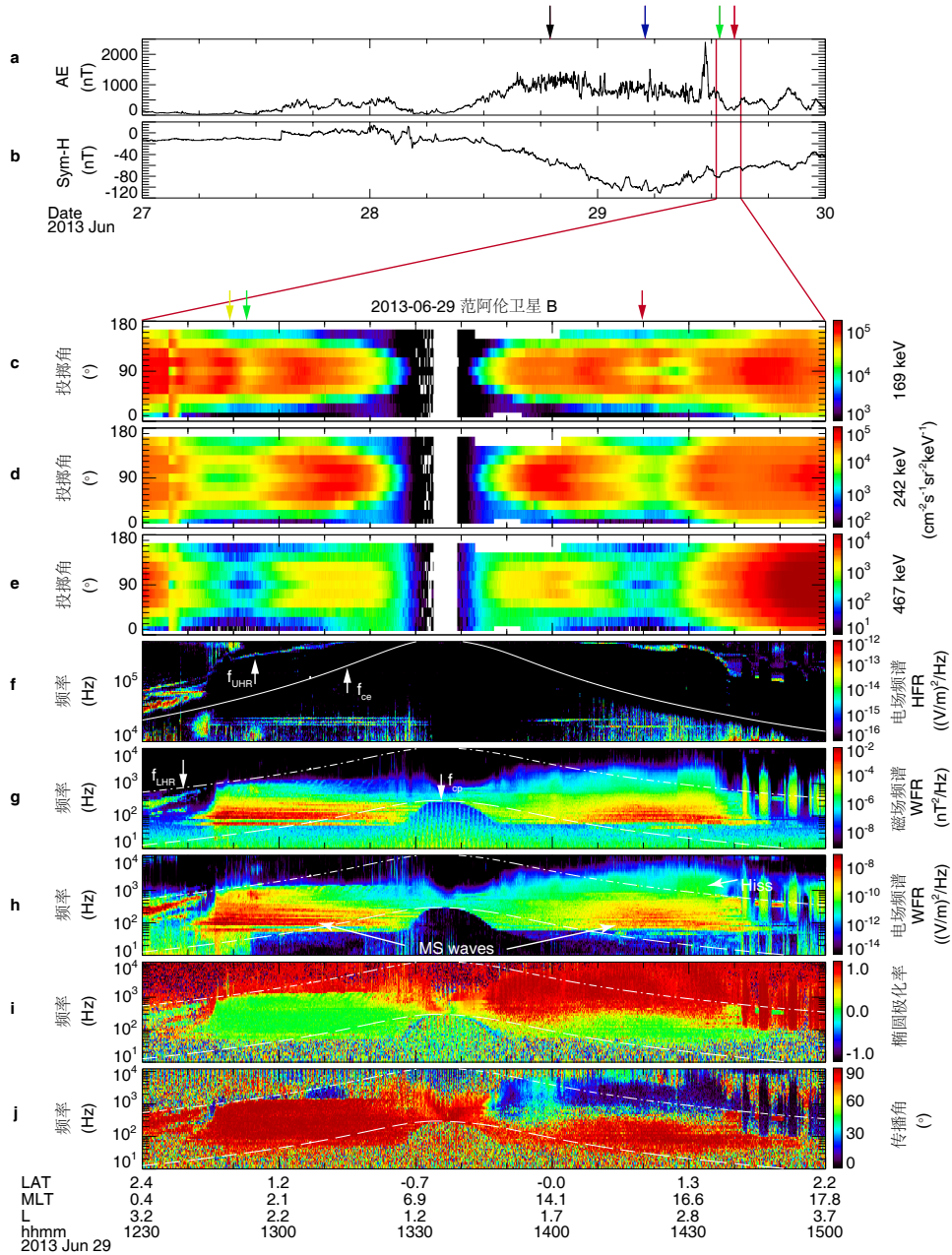


图 5.2 在 2013 年 6 月 27 日 - 30 日磁暴期间，范阿伦 B 卫星的电子微分通量与波动观测。a，标示亚暴注入的地磁 AE 指数，4 个箭头标志在图 5.1 中的 4 个时刻；b，1 分钟时间精度的 SYM-H 指数（即经向对称环电流扰动指数），是中纬度地磁扰动的水平方向分量（H）值。从 c 至 j 图中卫星观测的时间为在 2013 年 6 月 29 日 12:30 - 15:00 UT。c-e，MagEIS 仪器测量的辐射带高能电子的角向微分通量（c, 169 keV; d, 242 keV; e, 467 keV）；f，高频接收器（High Frequency Receiver, HFR）测量的 10-500 kHz 之间的电场谱，以及上混杂频率 f_{UHR} 与电子回旋频率 f_{ce} ；g，波形接收器（WaveForm Receiver, WFR）测量的 10-12000 Hz 的磁场功率谱，以及低混杂波频率 f_{LHR} 与质子回旋频率 f_{cp} 。h，与 g 对应的 WFR 电场功率谱；i，波动的椭圆极化率；j，由奇异值分解所计算的波动的传播角。观测表明，当磁声波增强时，电子由 90° 峰值分布转化成蝴蝶状角向分布。

UT 期间的高能电子与波动的观测。与图 5.2g-j 类似，图 5.3e-h 展示了 WFR 仪器的电磁波动及其极化、传播特性，可知彼时即在宽广的空间范围分布着强磁声波。范阿伦 A 卫星也在 09:00-12:00 UT 期间观测到分布宽广的磁声波，如图 5.4 所示。结合两颗卫星的数据，可知此磁声波在 02:00-15:00 UT 时间内分布于日侧与夜侧的宽广 MLT 范围，以及 $L=1.4-3.2$ 的径向范围。

以上观测显示磁声波与百 keV 电子蝴蝶状分布存在密切的对应关系。磁声波是否是造成内辐射带与槽区电子蝴蝶状分布的起源？如果是，那么磁声波与电子共振相互作用又是如何形成电子蝴蝶状分布的？这需要通过模拟电子动态变化来证实。

5.3 磁声波对高能电子作用的动态模拟

这一节通过模拟来证实，在 2013 年 6 月 29 日事件中，磁声波对内辐射带与槽区高能电子蝴蝶状分布的形成起关键作用。我们利用高精度波动观测数据，建立精确的磁声波的多波模型（包括它的频谱分布与传播角分布），并利用两颗卫星的随轨道的观测，建立磁声波在磁地方时上的空间分布模型。应用试验粒子模拟方法，我们计算了磁声波对辐射带电子作用的扩散系数，最后通过解福克-普朗克扩散方程，模拟出辐射带电子相空间密度随时间的动态变化。我们的模拟出在磁声波作用下，高能电子形成蝴蝶状分布的过程。本论文认为，磁声波与电子的朗道共振作用的效应，是磁声波对大投掷角电子进行平行加速，从而形成了电子的蝴蝶状角向分布。

5.3.1 磁声波频谱与传播角分布

为了量化磁声波对电子蝴蝶状分布形成的作用，我们首先需要利用高精度数据建立精确的磁声波模型。本文选取 EMFISIS 仪器在 $\sim 12:49$ UT（图 5.2c 中黄色箭头代表）的测量数据作为建立磁声波模型的基础，因为此时卫星在夜侧接近磁赤道（磁纬度 2.0° ），且该测量时段有高时间分辨率的波形数据。我们先对每组 1.9 秒（65536 采样）的波形数据从卫星坐标转化到场向坐标，再对波形做快速傅里叶变换，最后对每个频率的频谱做相位校正，得到每组波形样本的功率谱密度。这个时间段里所有的 burst mode 波形数据总共生成 20 组不同的磁场与电场波动功率谱，如图 5.5 中绿色线所示。我们把这些频谱的平均值（黑色线）用于模拟计算。图中可以看到，磁声波在低频范围（50-150 Hz）有明显的谐波结构。

磁声波的传播角是计算磁声波与电子共振作用过程中至关重要的参数。Means 等人发展了利用波形数据计算平面波传播方向的方法，多年来获得广泛应用^[74]。我们也采用 Means 等人的方法计算每个频率的传播角，传播角计算值为 90° 以下，我们将其对称到 90° 以上。图 5.6 绘出了磁声波各谐波的传播角分布，每 0.1° 的统计结果由图

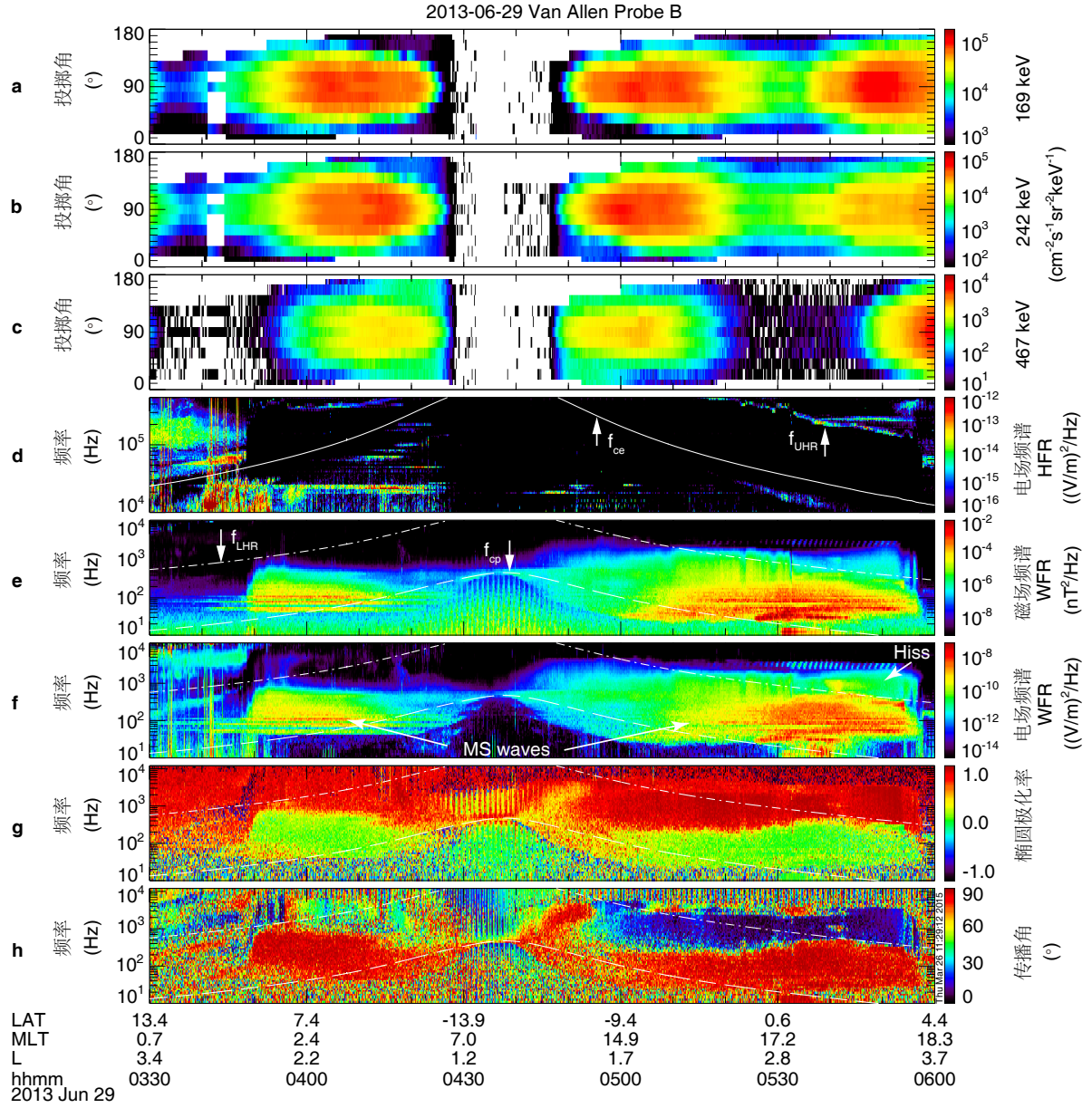


图 5.3 与图 5.2c-j 相同，为范阿伦 B 卫星在比图 5.2 早一个轨道周期（9 小时）的观测。卫星在夜侧时磁纬度偏高。

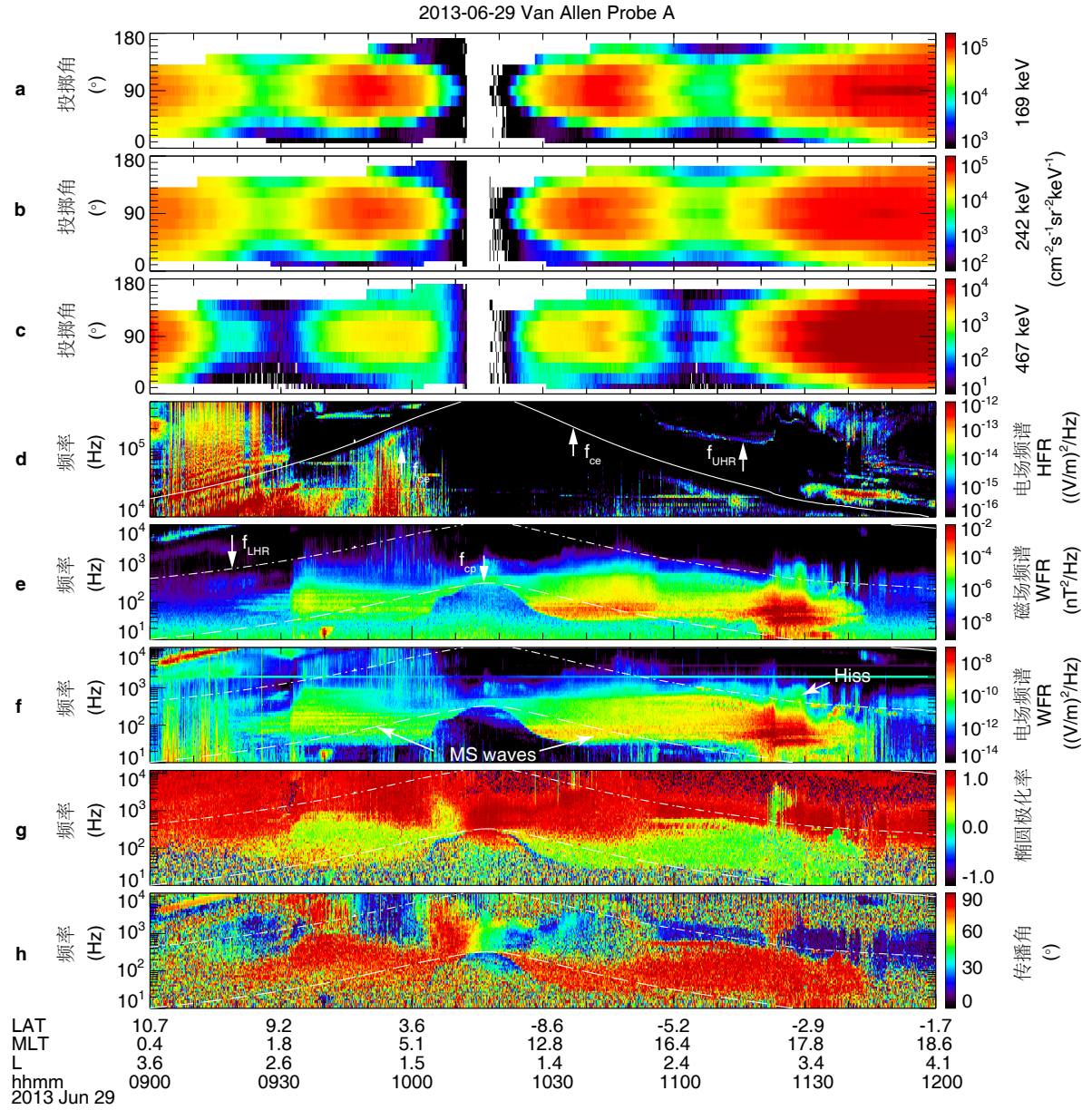


图 5.4 与图5.2c-j 类似，为范阿伦 A 卫星在 2013 年 6 月 29 日 09:00-12:00 期间的测量。

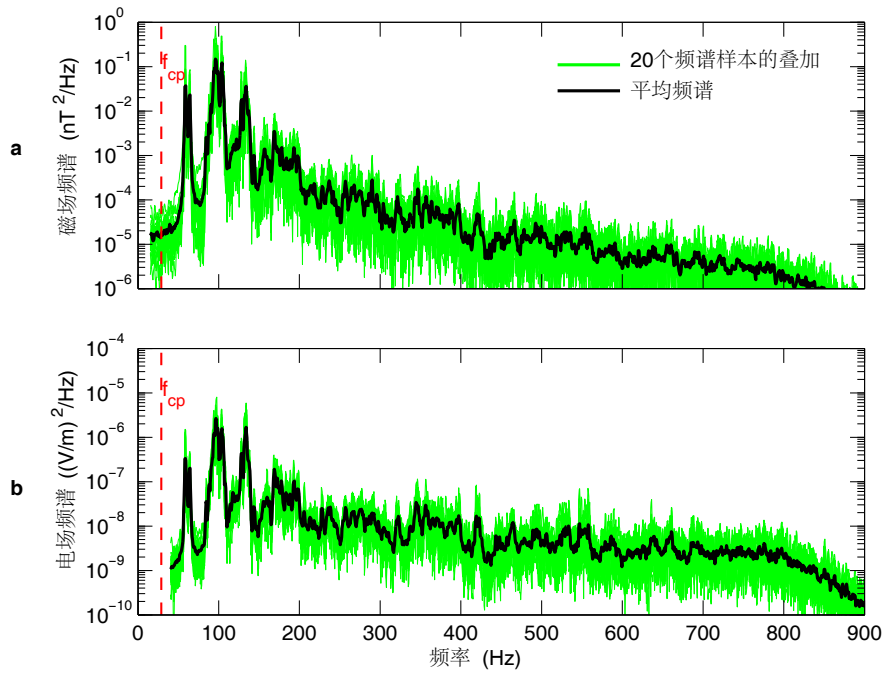


图 5.5 在 2013 年 6 月 29 日事件中的磁声波磁场与电场波动的频谱分布。我们用 12:49 UT 时刻附近的波形数据，得到 20 组不同的波动功率谱，由叠加在一起的绿色线表示，黑色线代表平均值。

5.6 黑色点表示。由于磁声波功率谱密度主要分布在低频范围，我们这里只给出前 6 个谐波（48-240 Hz）的计算。由图可见，各谐波的传播角在 90° 取峰值，我们进而对每个谐波做高斯拟合

$$f(\theta) \propto e^{-\left(\frac{\theta}{\delta\theta}\right)^2},$$

得到传播角分布的高斯宽度。前 6 个谐波的高斯宽度在 $4^\circ - 7^\circ$ 之间。为简单起见，我们对各谐波都选取 6° 作为高斯宽度。这样我们建立了具有频率、传播角分布的宽带磁声波模型。

5.3.2 磁声波对电子作用的扩散系数计算

本节利用两颗范阿伦卫星的全天观测数据（图 5.2，5.3 及 5.4），建立磁声波在磁地方时的空间分布模型。在 2013 年 6 月 29 日 02:00-15:00 UT 时间里，两颗卫星在日侧和夜侧 $L=2.4$ 处都观测到磁声波，并在不同纬度测量到它的强度。我们假设磁声波强度在纬度上呈高斯分布，通过强度测量我们得到纬度分布的高斯宽度为 $\delta\lambda = 5.4^\circ$ 。在夜侧 $L=2.4$ 处的赤道振幅为 535 pT，在日侧的赤道振幅为 415 pT，取中间的值 500 pT 用于计算。但是，因为卫星在 12:54 UT（图 5.2 中绿色箭头）位于 $L=2.4$ 处没有高精度波形数据，由于我们只能利用卫星在 12:49 UT（图 5.2 中黄色箭头）位于 $L=2.55$

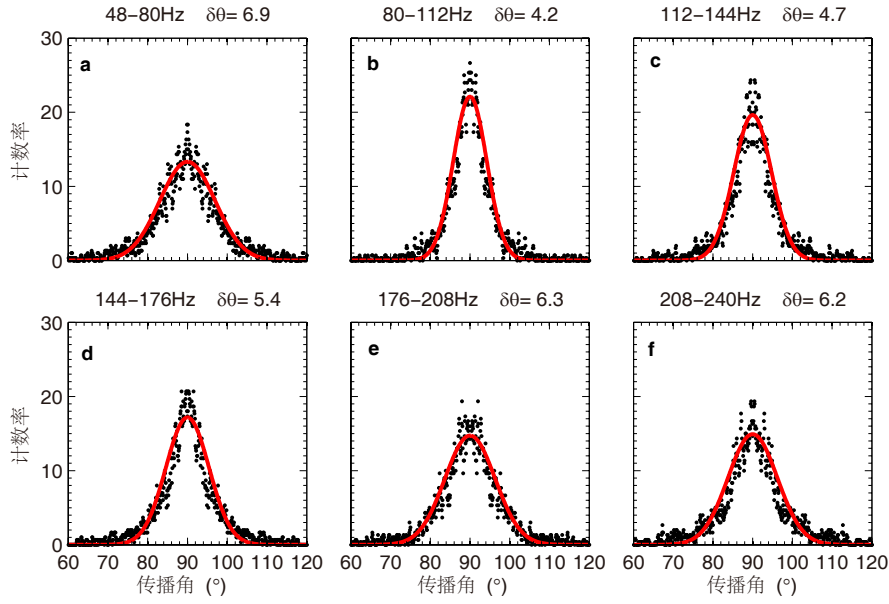


图 5.6 磁声波前 6 个谐波的传播角分布。我们分析 20 组波形数据，计算每个波动频率的传播角，在各谐波频率范围做统计，得到每 0.1° 累积的计数率，由黑色点表示。我们对每个谐波的传播角都做以 90° 为中心的高斯拟合，其高斯宽度 $\delta\theta$ 在每幅子图中给出。

处的高精度波形数据来建立波动模型。磁声波在 $L=2.55$ 处的波动振幅是 1.2 nT （WFR 频谱与高精度波形数据都得到这个振幅），至 $L=2.4$ 处耗散至 500 pT 。因此我们建立在 $L=2.4$ 处的波动功率谱时，乘了一个 $(5/12)^2 = 25/144$ 因子。

基于等离子体的波动理论^[61,95]，我们计算出磁声波的磁场与电场在三个方向上的分量。背景等离子体密度是 $N_e = 1380/\text{cm}^3$ ，这可以从高频接收器（High-Frequency Receiver, HFR）测量的上混杂频率 f_{UHR} ，并通过 $f_{UHR}^2 = f_{ce}^2 + f_{pe}^2$ 以及 $f_{pe}^2 = N_e e^2 / 2\pi\epsilon_0 m_e$ 关系得到。利用试验粒子模拟方法^[62,128]，我们得出磁声波与不同能量、投掷角的电子相互作用的局地弹跳平均扩散系数。由于卫星在 01-07h 以及 12-18h 的 MLT 范围都观测到磁声波（图 5.2, g-j；图 5.3, e-h；图 5.3, e-h）。我们可以合理地假设磁声波在 $L=2.4$ 处覆盖 12 h 的空间 MLT 范围。因此我们对局地弹跳平均的扩散系数乘 1/2 因子，得到在整个 $L=2.4$ 空间，漂移-弹跳平均的扩散系数。

图 5.7a-c 分别为磁声波对不同能量、投掷角电子作用的漂移-弹跳平均的投掷角扩散系数 $\langle D_{\alpha\alpha} \rangle$ 、动量扩散系数 $\langle D_{pp} \rangle$ ，以及投掷角、动量交叉扩散系数的相反数 $\langle -D_{\alpha p} \rangle$ 。从扩散系数图中，可知这个事件中磁声波对电子作用的具有如下特点：

1) 这个事件中磁声波主要跟 $> 60^\circ$ 投掷角电子相互作用，这是磁声波对不同投掷角电子起不同作用的关键。

2) 磁声波可快速有效地在小时的时间尺度散射大投掷角的 keV 电子，电子投掷角散射显著短于加速时间尺度（图 5.7 a-b）。

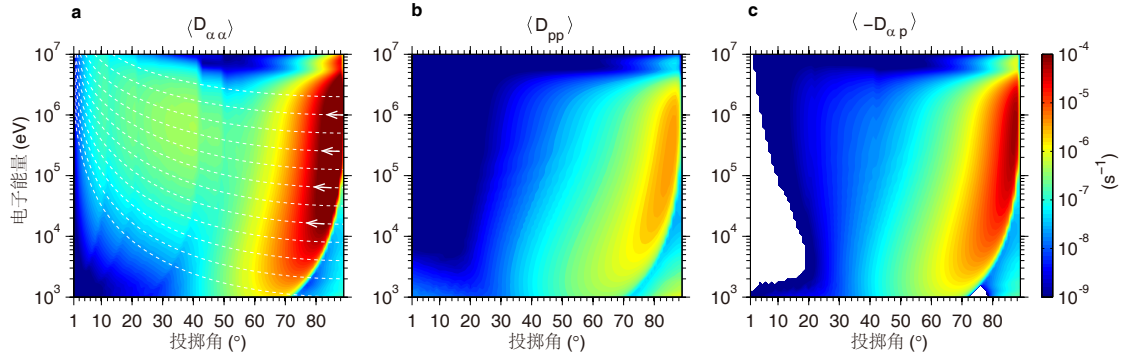


图 5.7 在 $L=2.4$ 的槽区，模拟计算的磁声波对电子作用的漂移-弹跳平均扩散系数。a，投掷角扩散系数；b，动量扩散系数；c，投掷角、动量交叉扩散系数的相反数。图中白色虚线代表垂直动量 $p_{\perp}$ 等值线，即朗道共振的扩散曲线。

3) 图 5.7c 中，磁声波对电子作用的交叉扩散系数基本为负，只有空白区域的交叉扩散系数为正数。

计算出磁声波对电子作用的扩散系数之后，再代入电子分布函数的初值，即可通过角福克-普朗克扩散方程来模拟电子的动态变化过程。

5.3.3 嘶声及其扩散系数模拟

在这个事件中，我们还观测到空间中分布着微弱的嘶声。为了证实磁声波对电子蝴蝶状分布的关键作用，我们需要通过模拟嘶声对电子的作用，来排除嘶声来源的可能性。等离子体层嘶声的特性是沿磁力线传播，且接近圆极化率（即极化率接近 1）。从图 5.2 g-j 以及图 5.3 e-h 中，我们看到日侧有微弱的 300Hz 以上嘶声，而在夜侧则几乎没有嘶声。嘶声的 MLT 分布与 Meredith 等人^[30]的统计的研究一致。按照 Ni 等人^[31]的方法，我们采用卫星在~14:20 UT（图 5.2 中红色箭头，此时 MLT=15h），即在 $L=2.35-2.45$ 处的观测的频谱做平均，得到嘶声频谱，如图 5.8 所示。磁声波与嘶声在频率范围有交叠，从图 5.2 的极化率与传播角参数可知，在这个时刻 300 Hz 以上波动主要是磁声波，而低于 300 Hz 的主要是嘶声。

我们在准线性扩散理论的基础上，用 UCLA Full Diffusion Code^[108,116] 计算嘶声的扩散系数。由于观测中嘶声仅覆盖 14-18h 的 MLT 范围（图 5.2 g-j；图 5.3 e-h），我们采用了 1/6 的漂移平均率计算嘶声对电子作用的漂移-弹跳平均扩散系数，图 5.9a-c 分别显示投掷角扩散系数 $\langle D_{\alpha\alpha} \rangle$ 、动量扩散系数 $\langle D_{pp} \rangle$ ，以及交叉扩散系数的绝对值 $\langle |D_{\alpha p}| \rangle$ 。从这些这些扩散系数中，我们可知嘶声对电子作用有如下特点：

1) 从图 a 可知，嘶声可有效地散射能量高于 200 keV 的电子至损失锥，但是对低能小投掷角电子几乎没有影响。

2) 通过比较图 a 与图 b 可知，嘶声对高能电子作用的投掷角扩散系数远大于动

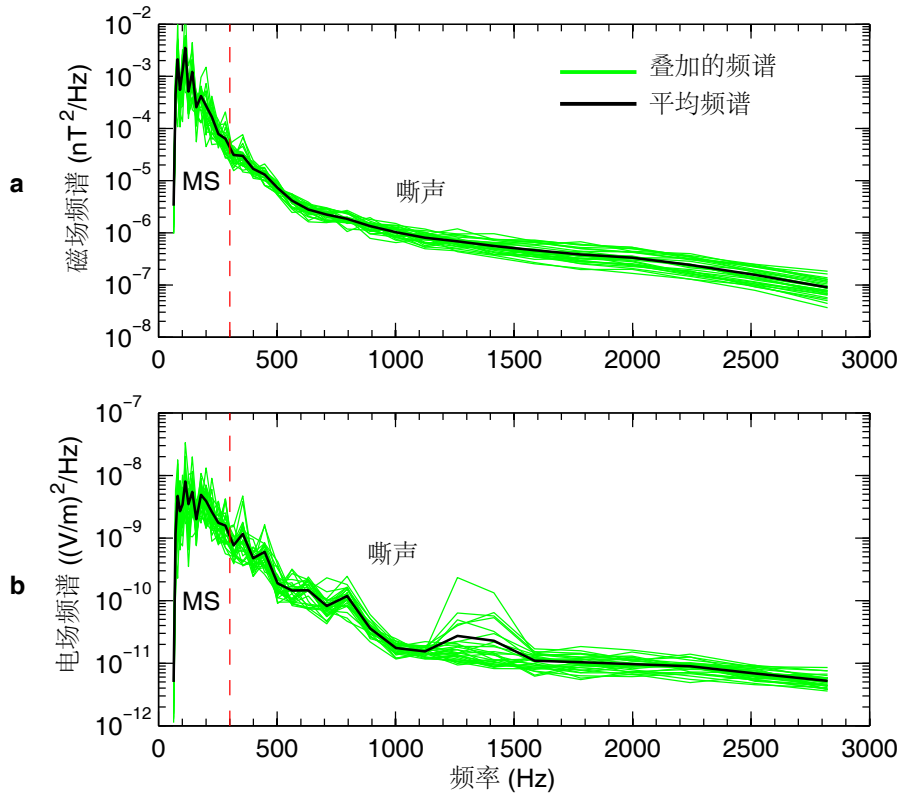


图 5.8 2013 年 6 月 29 日 14:20 UT 左右，卫星在 $L=2.35-2.45$ 间测量的嘶声功率谱密度，绿色线为不同时刻的功率谱分布，黑色为平均强度。300 Hz 以下的波动主要是磁声波，而 300 Hz 以上主要是嘶声，两种波动在 300 Hz 附近有交叠。

量扩散系数，即嘶声可有效地对电子进行投掷角散射，但没有显著的加速效应。

3) 嘶声对 100 keV 至 1 MeV 能量范围、 $50^\circ - 80^\circ$ 投掷角范围的电子扩散时间尺度约为 100 天，即对这些粒子没有显著的效应。因而嘶声不是造成高能电子蝴蝶状分布的关键因素。

5.3.4 电子相空间密度动态变化模拟

前两小节我们分别模拟了 2013 年 6 月 29 日事件中磁声波与嘶声对电子作用的扩散系数，并分析了它们对高能电子的效应。但上述理论分析不能直接跟观测做比较，因而我们需要模拟在磁声波与嘶声作用下，高能电子相空间分布随时间的动态变化，并与观测的粒子相空间分布（可由微分通量转化）做对比。

电子的动态变化可通过解二维的福克-普朗克扩散方程得到

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial \alpha} G \left(\langle D_{\alpha\alpha} \rangle \frac{\partial f}{\partial \alpha} + p \langle D_{\alpha p} \rangle \frac{\partial f}{\partial p} \right) + \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial p} G \left(p \langle D_{\alpha p} \rangle \frac{\partial f}{\partial \alpha} + p^2 \langle D_{pp} \rangle \frac{\partial f}{\partial p} \right) \quad (5.1)$$

这里 f 代表电子的相空间密度， α 代表赤道投掷角， p 代表电子动量， $G =$

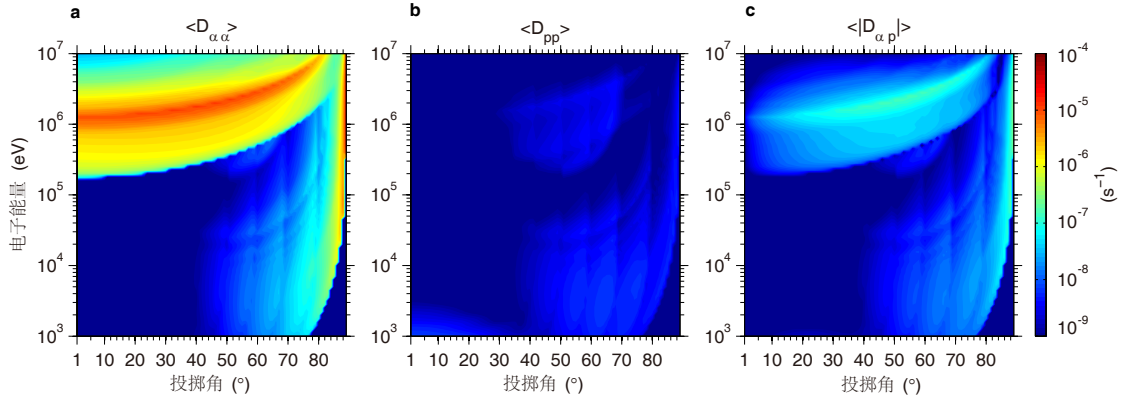


图 5.9 在 $L=2.4$ 处的嘶声与电子相互作用的漂移-弹跳平均扩散系数。a, 投掷角扩散系数; b, 动量扩散系数; c, 投掷角、动量交叉扩散系数的绝对值。

$p^2 T(\alpha) \sin \alpha \cos \alpha$, 这里 $T(\alpha) \approx 1.30 - 0.56 \sin \alpha$ 是归一化的弹跳周期, 式中 $\langle D \rangle$ 代表漂移-弹跳平均的扩散系数。上述福克-普朗克方程的 4 项分别代表投掷角扩散、动量扩散以及两个交叉扩散项, 通过数值模拟解这个方程, 可以得到粒子相空间密度在能量与投掷角上的变化, 这种动态变化的快慢受电子相空间密度在投掷角上的梯度 $\partial f / \partial \alpha$ 以及在动量上的梯度 $\partial f / \partial p$ 影响, 同时也与三个扩散系数密切相关。

我们选取卫星在观测到磁声波活动增强之前, 即 6 月 28 日 18:50 UT, 在 $L=2.4$ 处观测到的粒子相空间密度分布为初始值。依据 HOPE^[71] 和 MagEIS^[70] 观测的微分通量做插值, 利用能量与相空间密度的关系 (1.14), 我们得到的 1 keV 至 1 MeV 的电子初始相空间密度数值。在磁声波与微弱的嘶声联合作用下, 电子动态变化的模拟结果见图 5.10a-f。图中虚线代表电子初始相空间密度, 实线代表数值模拟的各时间里电子的相空间密度, 点代表依据卫星在 6 月 29 日 14:20 UT 的测量得到的电子相空间密度。不同颜色的线与点代表不同能量电子的相空间密度。图中我们只画出 0° 到 90° 投掷角的电子的相空间分布, 在 90° 到 180° 投掷角上是对称的分布。我们看到在波动作用 20 分钟后, ~ 100 keV 电子开始呈现蝴蝶状角向分布。在波动继续作用下, 12 个小时之后, 这些高能电子蝴蝶状分布变得更明显, 且与 MagEIS 的观测非常吻合 (图 5.10d)。

我们进一步区分磁声波与嘶声的作用。图 5.10e 与 5.10f 显示了在磁声波与嘶声分别单独作用下, 电子在 12 个小时之后的相空间密度。可见只在嘶声作用下, 能量为 200 keV 以上的小投掷角电子逐渐被散射至损失锥, 但是嘶声对 50° 以上投掷角电子的变化几乎不起作用, 因而并不能形成蝴蝶状分布。而在磁声波单独作用下, 接近 90° 投掷角的电子逐渐被输运到 $50^\circ - 70^\circ$ 投掷角, 形成了蝴蝶状分布。这证实了磁声波是槽区高能电子蝴蝶状分布形成的主要来源。

这个事件中, 我们在 $L=1.4-3.2$ 的区域内都观测到电子蝴蝶状分布, 和对应存在

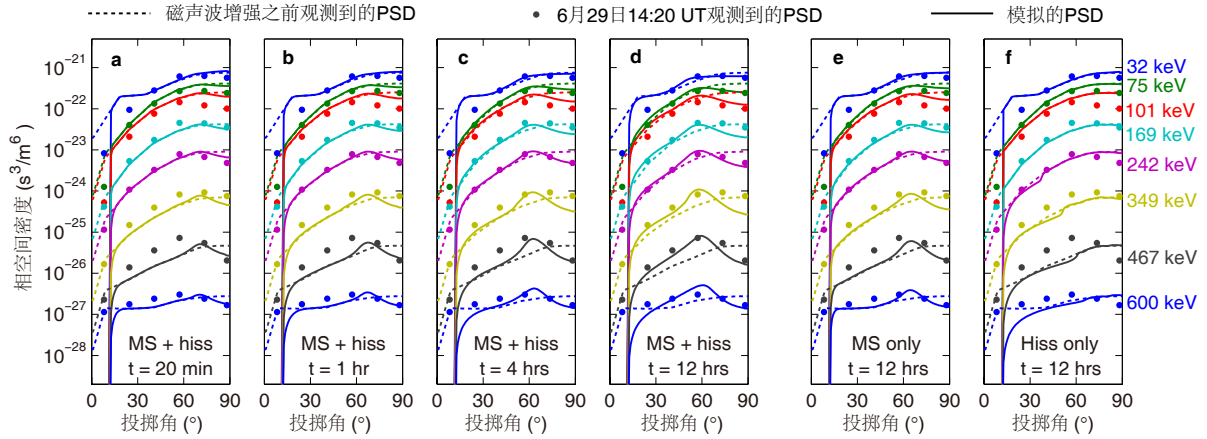


图 5.10 电子相空间密度动态变化模拟与观测的比较，这里我们只画出各能量电子在 $0^\circ - 90^\circ$ 投掷角上的相空间密度， $90^\circ - 180^\circ$ 投掷角上为对称分布。a-d，在磁声波与嘶声联合作用下，电子相空间密度随时间的变化；e，只在磁声波作用下电子相空间密度的变化；f，只在嘶声作用下电子的动态变化。虚线代表电子相空间密度的初始值，点代表在 6 月 29 日 14:20 UT 的观测值（除了 32 keV 与 75 keV 电子是在亚暴注入前 12:50 UT 的测量）。 90° 投掷角的电子在磁声波与嘶声作用下输运到中小投掷角，其中磁声波的散射对蝴蝶状分布起主要作用。

的磁声波，我们通过模拟研究发现，这些蝴蝶状分布的形成都可以由磁声波散射来解释。

5.4 磁声波形成电子蝴蝶状角向分布的机制：朗道共振

在这个事件中，磁声波如何使槽区百 keV 电子形成蝴蝶状分布呢？即为何 ~ 100 keV 电子在 $\sim 60^\circ$ 投掷角上的相空间密度比大投掷角以及更小投掷角电子的相空间密度更大呢？

这个事件中，磁声波位于等离子体层内，它主要通过朗道共振对高能电子作用，其效应主要是对电子平行加速。在朗道共振的平行加速作用下，电子主要沿垂直动量 ($p_\perp$) 等值线扩散，如图 5.7 与图 5.11 中白色虚线所示。由于能量小的电子相空间密度较大，电子在相空间中沿 $p_\perp$ 等值线向更高能量方向扩散，例如，图 5.11 中 a 所代表的粒子沿扩散曲线扩散至 b 所代表的粒子。在这个过程中由于投掷角减小，也导致共振相互作用的投掷角、动量交叉扩散系数为负（图 5.7c）。在 (α, E) 空间中空白区域，由于 transit-time 效应显著，交叉扩散系数为正。由于大投掷角电子受到磁声波充分作用，其沿 $p_\perp$ 等值线的相空间密度趋向于平滑，即 a 所代表的粒子与 b 所代表的粒子相空间密度趋于一致 ($f_a \approx f_b$)。然而与 b 能量一致的 90° 投掷角电子，即 c 所代表的粒子，其相空间密度比低能的 a 粒子低 ($f_a > f_c$)。因而磁声波充分作用之后，b 所代表的电子比同能量、大投掷角的 c 所代表的电子相空间密度更高 ($f_b > f_c$)。

另外，由于 60° 以下投掷角的电子与磁声波共振作用显著变弱，受朗道共振散射

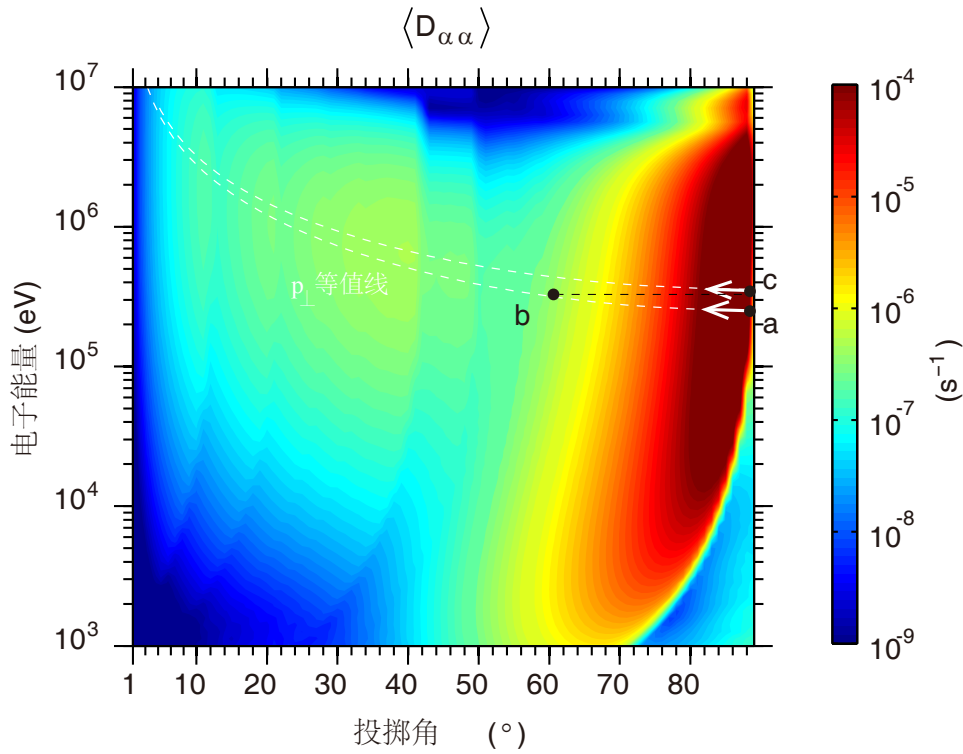


图 5.11 磁声波对高能电子产生蝴蝶状分布示意图。

的高能电子趋向于在 $50^\circ - 70^\circ$ 投掷角堆积，最终这些 ~ 100 keV 电子形成蝴蝶状投掷角分布。

5.5 磁声波散射外辐射带中心电子的观测与模拟

上述事件中，我们在内辐射带、槽区以及外辐射带内边缘 ($L=1.4-3.2$) 区域内都观测到电子蝴蝶状分布，及对应存在的磁声波。实际上从迄今已有的观测表明，赤道磁声波可快速地散射远至 $L=4.7$ 的外辐射带电子，形成蝴蝶状分布。

图 5.12 展示的是 2013 年 8 月 21 日 06:20 UT 至 06:28 UT 这 8 分钟时间里，范阿伦 A 卫星的电子微分通量与磁声波的观测。图 5.12a-e 展示的是 MagEIS 仪器所测量的各能量段电子的微分通量 (a, 54 keV; b, 80 keV; c, 108 keV; d, 144 keV; e, 226 keV)。这些不同能量的电子起初呈现 90° 峰值分布 (图 5.12a-e)。图 5.12e 展示的是频率在 10 Hz-12 kHz 之间的磁场波动功率谱密度。在 6:23 UT，一个磁声波来临 (这里我们省略波动的传播与极化特性的展示)，其振幅为 1.5 nT。我们可以看到，54-144 keV 电子在一分钟时间里立刻呈现出蝴蝶状分布，但更高能的 226 keV 电子并没有明显的投掷角变化 (图 5.12e)。

利用前一个事件中同样的方法，我们得到这个事件中磁声波的磁场与电场频谱分

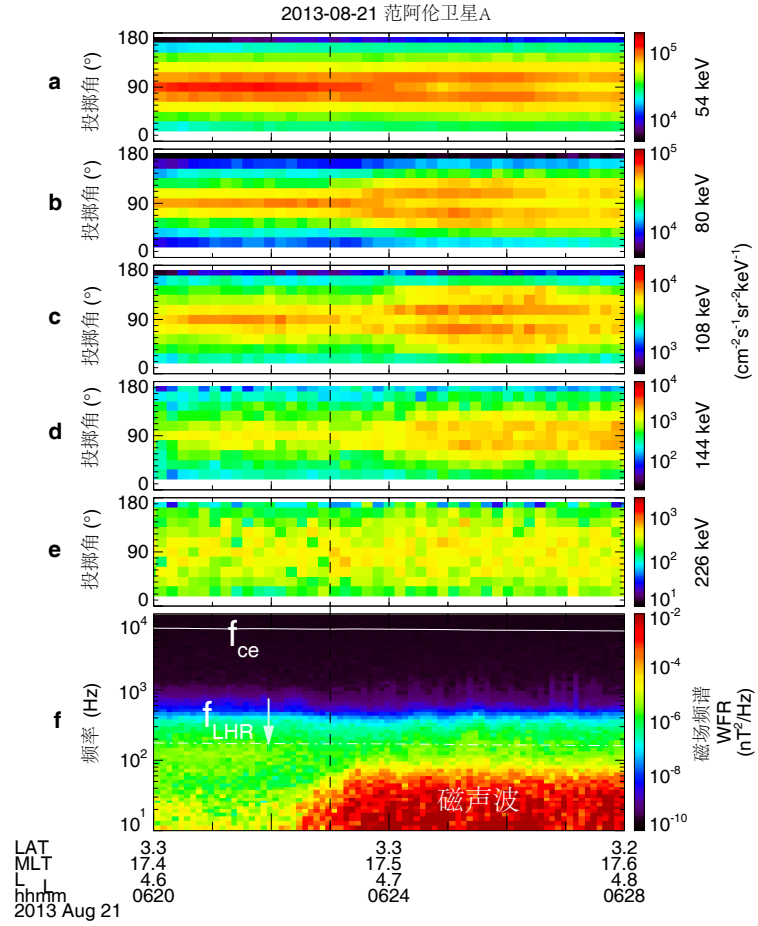


图 5.12 在 2013 年 8 月 21 日事件中，磁声波散射形成 54-144 keV 电子蝴蝶状分布的观测。a-e，范阿伦 A 卫星的 MagEIS 仪器探测的 32-226 keV 电子在 8 分钟时间里的动态变化；f，磁场波动功率谱密度；观测显示，54-144 keV 电子在磁声波增强 1 分钟之后立即呈现蝴蝶状投掷角分布。

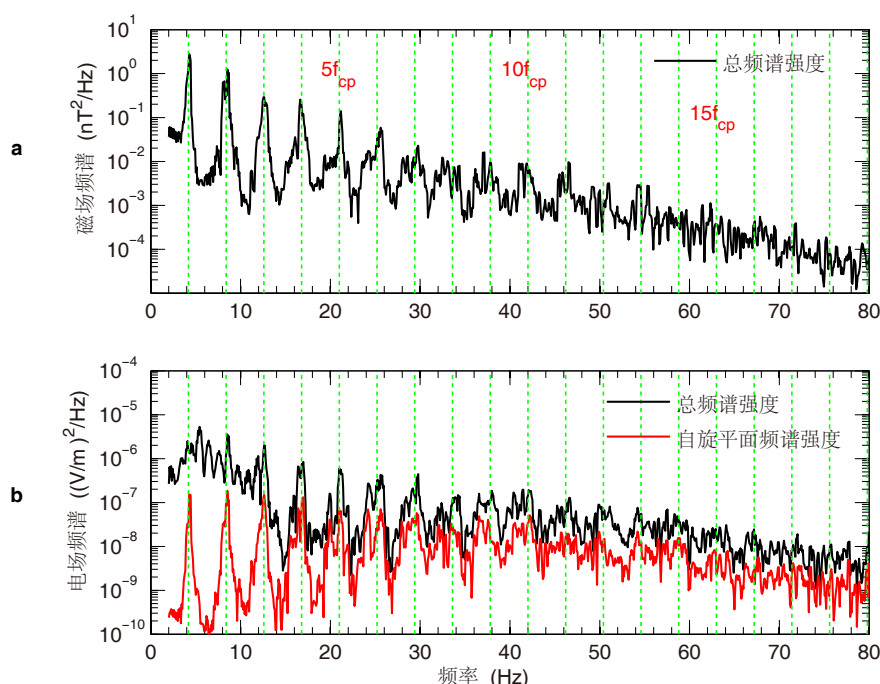


图 5.13 由 2013 年 8 月 21 日 06:24 UT 的波形数据，所计算的磁声波磁场（a）与电场（b）的频谱分布。自旋轴方向的电场在低频范围有污染，因而总电场也有污染。我们采用磁场波动数据用于模拟，并通过冷等离子体理论与麦克斯韦关系去除了自旋轴方向上电场的污染。

布，如图 5.13 所示。这个磁声波在 f_{cp} 到十几个 f_{cp} 频率间具有非常明显的谐波结构。同样的，我们用试验粒子方法模拟计算了这个磁声波与电子相互作用的弹跳平均扩散系数，如图 5.14 所示。这个事件中 06:20-06:28 UT 时间里嘶声相对磁声波非常弱，我们只模拟了磁声波的作用。

进而，我们求解了福克-普郎克扩散方程，模拟了在磁声波作用下的电子相空间密度变化（图 5.15a-d）。模拟显示磁声波的散射可形成 54-144 keV 电子的蝴蝶状分布，而更高能的 226 keV 电子没有形成蝴蝶状分布，与观测非常相符。这说明，近地外辐射带的蝴蝶状分布也往往是起源于磁声波的作用。

5.6 磁声波散射超相对论电子形成蝴蝶状分布

上面两个事例的观测中，磁声波对 ~ 100 keV 电子通过朗道共振的平行加速，形成电子蝴蝶状投掷角分布。超相对论电子是否可在磁声波作用下形成蝴蝶状分布呢？如果可以，需要什么条件呢？理论上，从 2013 年 6 月 29 日磁声波对电子作用的扩散系数图 5.7 中可知，这个磁声波亦可潜在地使超相对论电子形成蝴蝶状分布。但是该事件中，在 $L=1.4-3.4$ 磁声波存在的范围内，能量在 1 MeV 以上的电子的通量低于 MagEIS 与 REPT 仪器的噪声范围，因此卫星不能有效的记录。如果磁声波所分布的

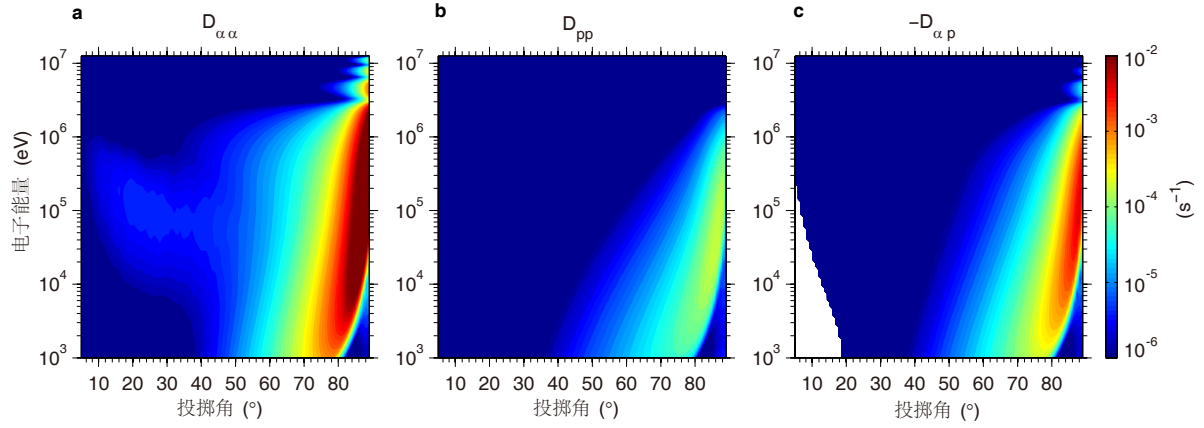


图 5.14 在 2013 年 8 月 21 日事件中, $L=4.7$ 处的磁声波与电子相互作用的扩散系数, 由试验粒子模拟所得。a, 投掷角扩散系数; b, 动量扩散系数; c, 投掷角、动量交叉扩散系数的相反数。

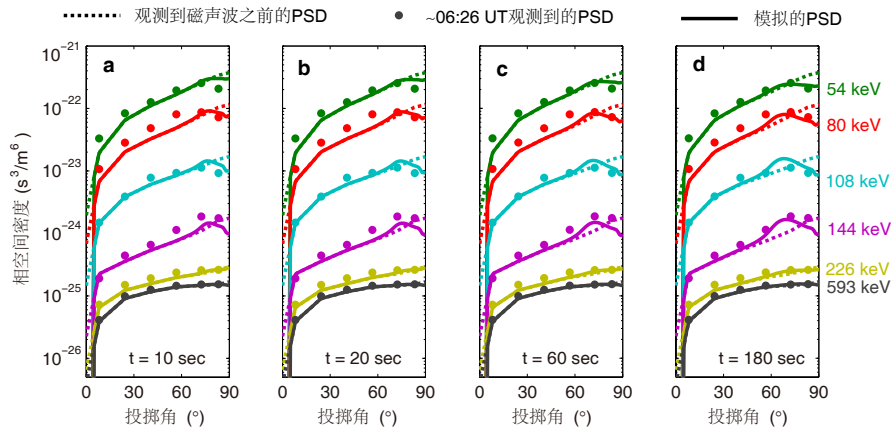


图 5.15 2013 年 8 月 21 日事件中, 磁声波散射形成 54-144 keV 电子蝴蝶状分布的模拟。a-d, 电子动态变化模拟及与观测的比较。模拟中所用的电子初始相空间密度是探测到磁声波之前 2 分钟的平均值, 相空间密度的最终观测值 (图中的点) 是观测到磁声波之后 2-4 分钟的平均值。

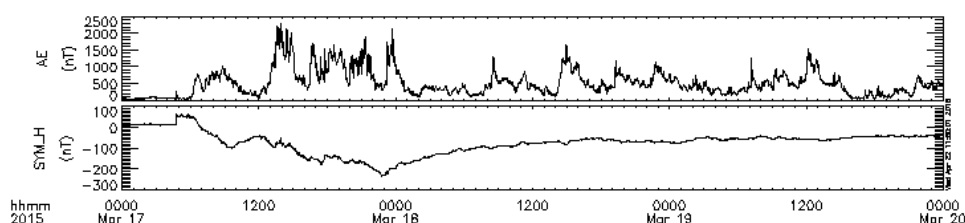


图 5.16 2015 年 3 月 17-20 日大磁暴期间的 AE 指数与 Sym-H 指数。

区域有大量的超相对论电子，我们就可以观测磁声波对超相对论电子的效应。

最近的 2015 年 3 月 17 - 20 日发生的磁暴事件，是近二十年来最大的磁暴，磁声波散射超相对论电子形成蝴蝶状分布在这个事件中得到观测上的证实。图 5.16 展示的是这个磁暴期间 AE 指数与 Sym-H 指数，AE 指数最达 2700 nT，而 sym-H 指数最低达 -240 nT，为最近几年最低值。图 5.17 展示的是 2015 年 3 月 18 日 22: 00 UT 至 19 日 01: 30 UT 的恢复相期间，MagEIS 测量的 169 keV 至 1.5 MeV 高能电子的微分通量，以及 REPT 测量的 2.6 MeV 至 4.2 MeV 的超相对论电子的微分通量。范阿伦 B 卫星在 18 日 23: 00 UT 之前在偏高纬，只观测到 <892 keV 电子的蝴蝶状分布。而在低纬区（19 日 00: 00 UT 之后），能量高达 4.2 MeV 的电子也呈现出蝴蝶状分布。

如前所述，在 $L < 4.0$ 的区域漂移壳分裂效应微弱，一般不导致电子形成蝴蝶状分布。在本事件中，范阿伦 B 卫星经过的 $L = 4.0 - 4.5$ 的区域，所观测到的高能电子并没有呈现出蝴蝶状分布，这清楚地表明，上述在 $L = 3$ 附近观测到的 MeV 电子的蝴蝶状分布不可能起源于磁场的日夜不对称性和漂移壳分裂。图 5.17i-j 给出磁声波的观测，我们可见高能电子的蝴蝶状分布正好处于磁声波所覆盖的区域。因而，这些超相对论电子也很有可能是在磁声波作用下呈现出蝴蝶状分布。

我们的观测与模拟结果显示，赤道磁声波可有效地散射内辐射带、槽区与外辐射带的高能电子，形成电子的蝴蝶状投掷角分布。由于磁声波广泛存在于地球内磁层等离子体层内外，并分布于宽广的磁地方时，未来我们全面地模拟辐射带电子的运动，以及全面了解波粒共振相互作用的效应时，加入磁声波的效应非常必要。

5.7 小结

这一章我们结合范阿伦卫星的观测，以及试验粒子模拟与福克-普郎克扩散模拟，首次揭示磁声波对辐射带的效应：磁声波可对内辐射带、槽区及外辐射带高能电子（ ~ 100 keV 至 5 MeV）在 1 分钟至数小时时间尺度上快速形成蝴蝶状角向分布。我们揭示，磁声波通过朗道共振，对高能电子进行平行方向上加速，从而形成蝴蝶状角向分布，其效应是使得集中在赤道附近的高能粒子分散在中高纬区域。

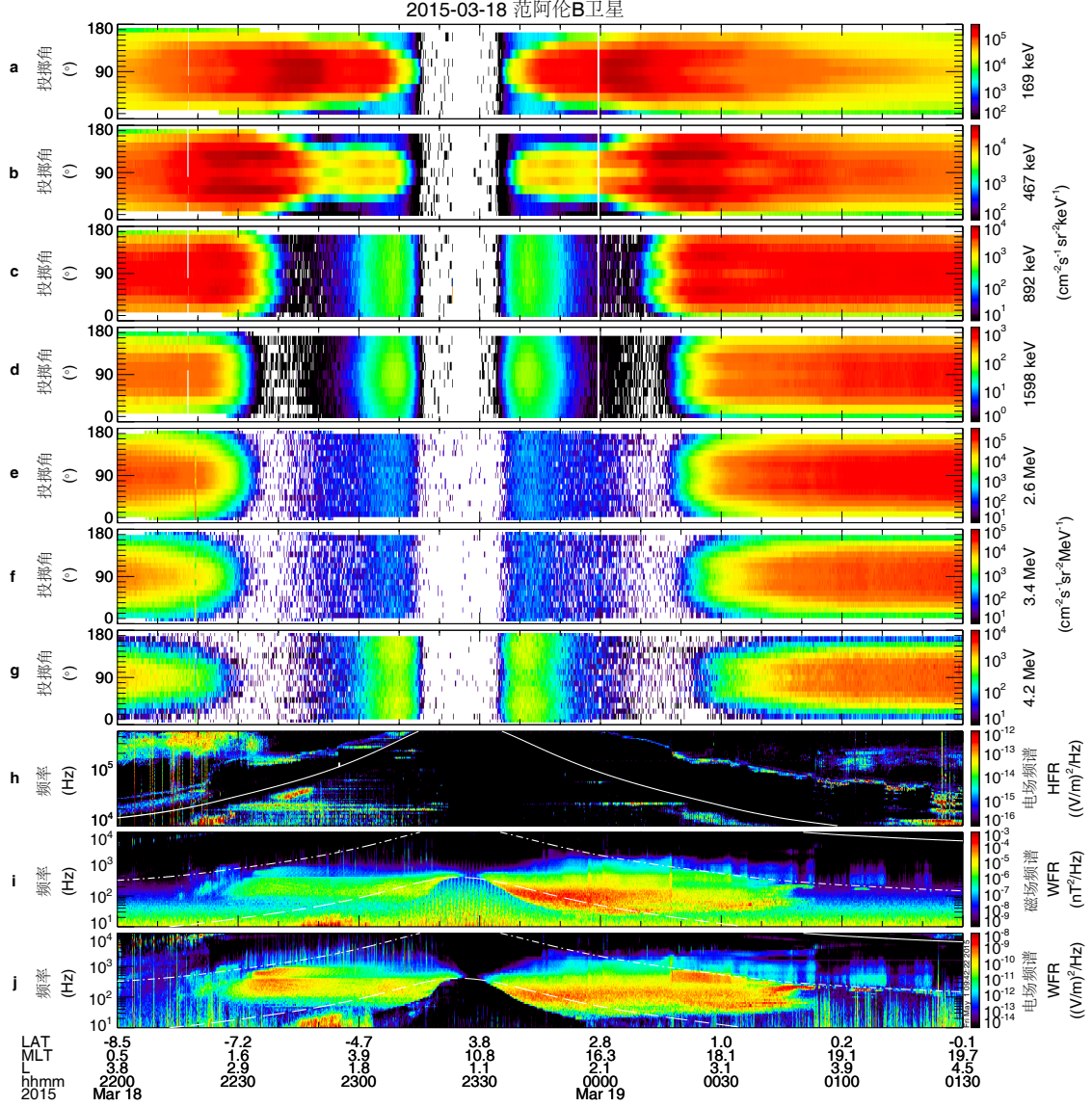


图 5.17 在 2015 年 3 月 18 日 22: 00 UT 至 19 日 01: 30 UT 大磁暴恢复相期间, 范阿伦 B 卫星的高能电子微分通量与波动的观测。a-d, MagEIS 仪器测量的电子通量 (a, 169 keV; b, 467 keV; c, 892 keV; d, 1598 keV); e-g, REPT 仪器测量的超相对论电子通量 (e, 2.6 MeV; f, 3.4 MeV; g, 4.2 MeV)。h, HFR 测量的频率为 10-500 kHz 之间的电场功率谱密度, 以及电子回旋频率 f_{ce} 。i-j, WFR 测量的频率为 10-10,000 Hz 的磁场与电场功率谱密度, 以及低混杂波频率 f_{LHR} 及质子回旋频率 f_{cp} 。图中强波动为磁声波, 外辐射有磁声波存在的区域, 169keV 至 4.2 MeV 电子都形成了蝴蝶状分布。

本章首先介绍辐射带高能电子蝴蝶状角向分布的观测，重点描述范阿伦卫星在 2013 年 6 月 28 - 29 日磁暴期间，在内辐射带与槽区观测到的一次典型的高能电子形成蝴蝶状分布的事件（6.1 节）。其次，我们详细分析了这个事件中卫星对磁声波的同步观测，论证了磁声波导致高能电子蝴蝶状角向分布的观测依据（6.2 节）。接着，依据该事件的观测数据，我们建立了具有多次谐波结构、多传播方向分布的精细磁声波模型及其在磁地方时上的分布。我们用试验粒子模拟方法计算了磁声波对电子作用的扩散系数，通过解福克-普朗克扩散方程，我们模拟出了电子在磁声波作用下形成蝴蝶状角向分布的过程（6.3 节），并对这种现象给出了物理解释（6.4 节）。我们证明了磁声波是使内辐射带与槽区 ~ 100 keV 高能电子形成蝴蝶状分布的关键因素。

此外，通过分析 2013 年 8 月 21 日事件中磁声波与电子的观测，我们报导并通过模拟证明，强磁声波可在 1 分钟时间里迅速地对外辐射带 ~ 100 keV 电子形成蝴蝶状分布（6.5 节）。在最近 2015 年 3 月 17 日 - 20 日的大磁暴事件中，我们报导磁声波甚至可潜在地对能量高达 4.2 MeV 的外辐射带超相对论电子形成蝴蝶状分布（6.6 节）。

第六章 本论文主要结论与成果

研究磁声波对辐射带的影响，我们需要结合卫星观测、波粒共振理论以及数值模拟，来全面揭示磁声波对辐射带高能电子动态变化的重要作用。我们首先推广了模拟单粒子在稳恒地磁场中长时间运动的变分辛积分算法，之后改进和发展了模拟波粒共振的试验粒子算法。为了研究磁声波对电子作用的物理机制与过程，本论文使用了试验粒子模拟与准线性理论两种方法。本论文发现在高密度区的磁声波对电子的作用主要是通过朗道共振，其效应是对电子进行平行方向的加速；而在低密度区，磁声波对电子有显著的 *transit-time* 作用，此时准线性理论对计算磁声波对辐射带电子的作用并不适用，需要利用试验粒子模拟。通过分析三个事件中的波动与粒子的观测数据，并结合模拟，本论文揭示，磁声波对内辐射带、槽区以及近地外辐射带高能电子的蝴蝶状角向分布的形成起关键作用。在大磁暴期间，磁声波可对高达 4.2 MeV 的超相对论电子形成蝴蝶角向状分布。

1、本论文把变分辛积分算法应用于计算磁层粒子的导心运动中，模拟了与磁声波激发相关的环电流质子的漂移轨迹。变分辛积分算法可精确保持拉格朗日辛结构，因而保持粒子在稳恒场中的能量、第二积分不变量以及第三积分不变量守恒，在长时间模拟中始终保持数值的精确性，比传统四阶龙格-库塔法具有显著的数值优越性与物理守恒性。

2、本论文发展并改进了模拟一个单色哨声模波模电磁波与带电粒子的共振作用的回旋平均算法。这种模拟算法不但高效，并且具有清晰的物理意义，有助于分析在波粒共振作用中粒子的能量和投掷角变化。通过对比前人的公式，本论文发现 Bortnik 等人公式存在符号问题。这个符号问题导致在模拟磁声波对电子的作用中产生严重错误。此外，本论文指出公式中的波动向心加速项在非线性共振中至关重要，可极大加强相位捕获效应。利用改进后的公式，可准确地模拟磁声波对电子的散射与加速过程，其模拟结果与不做回旋平均、直接积分洛伦兹力的结果精确吻合。

3、为了研究磁声波对电子作用的物理机制，本论文利用准线性理论与试验粒子模拟两种方法计算波粒作用的扩散系数。本论文发现，在等离子体层内，磁声波主要通过朗道共振对高能电子作用，主要改变粒子的平行动量。对于在等离子体层外低密度区的磁声波，由于它通常在平行于磁力线方向传播不到 2 个平行波长，它可通过显著的 *transit-time* 效应作用于电子。由于准线性理论只能模拟磁声波对电子的朗道共振作用，因此不适用于低密度区的磁声波，而需要用试验粒子模拟方法更精确地计算波

粒作用。

4、磁声波主要通过朗道共振作用散射、加速内辐射带、槽区以及外辐射带内边缘的 ~ 100 keV 高能电子，通过平行加速，它将近 90° 投掷角电子散射至 $\sim 50-70$ 度，在数小时时间尺度上对电子形成蝴蝶状角向分布，并伴随缓慢加速。磁声波对槽区、内辐射带电子的动态变化与蝴蝶状角向分布的形成起关键作用。

5、大振幅磁声波可在 1 分钟时间里快速对外辐射带 ~ 100 keV 电子形成蝴蝶状分布。在大磁暴期间，在近地外辐射带超相对论 (> 2 MeV) 电子被加速起来之后，磁声波可潜在地散射超相对论电子形成蝴蝶状分布。磁声波是近地外辐射带 ~ 100 keV 电子与超相对论电子蝴蝶状分布的潜在的重要来源。

6.1 创新点

本论文的创新点可总结为“数据新、方法新、结论新”。本论文利用范阿伦卫星高精度波动数据，率先建立具有包含多次谐波与多传播方向的磁声波精确模型，及其在磁地方时的分布。本论文改进和发展了磁声波对电子作用的试验粒子模拟方法，在此基础上论证了磁声波对电子作用的物理机制与动态效应。最后，通过三个观测实例，结合在磁声波作用下电子动态变化模拟，本论文首次揭示，磁声波是内辐射带与槽区高能电子蝴蝶状分布形成的关键机制，也是近地外辐射带超相对论电子蝴蝶状分布的重要来源。具体来说，本研究工作具有以下创新点。

一、在范阿伦卫星高精度观测数据的基础上，率先建立了具有谐波频谱结构与传播方向的赤道磁声波精确模型，及其在磁地方时的分布。

前人在初步研究磁声波与辐射带电子相互作用的工作中，磁声波模型的建立比较粗略，表现在以下方面：

1) 前人的工作中由于缺乏高分辨率的磁声波观测数据，因而从前的磁声波模型不能呈现磁声波的多次谐波结构。

2) 前人的工作中没有精确计算传播角，只是给一个估计范围。而垂直传播的磁声波与电子的作用对传播角很敏感，例如 89° 传播角的磁声波的朗道共振速度比 88° 传播角的磁声波朗道共振速度大一倍。

3) 从前 CLUSTER、THEMIS 等卫星不能长时间在低纬运行，且轨道周期相对较长，对磁声波只进行了单点和短时间时间的观测，因而不能从探测数据中给出磁声波的持续时间、纬度范围、径向分布以及全球磁地方时分布。

本论文的相关工作使用了范阿伦卫星的高精度波动数据。本论文研究的磁声波散射高能电子的事件中，高分辨率波动数据显示，磁声波都呈现出明显的谐波结构，本论文利用范阿伦卫星的高精度数据，建立多次谐波模型。对于磁声波的每一个谐波，

本论文都精确计算其传播角的分布，并建立了多传播角模型。由于磁声波广泛分布于辐射带所在空间，本论文通过两颗范阿伦卫星在多点、多时间的观测，建立了磁声波在磁地方时上分布模型，并分析其在空间里的持续时间。这对精确量化磁声波对辐射带电子的效应起了重要作用。

二、本论文改进和发展了磁声波对电子作用的试验粒子模拟的方法，在此基础上认证了准线性理论不适用于研究磁声波对电子的 **transit-time** 散射与加速效应，并认证了磁声波对电子的朗道共振作用的主要效应是对近 90° 投掷角电子进行平行加速，从而散射至较小投掷角（例如 $50^\circ - 70^\circ$ ）与较大投掷角（例如 $110^\circ - 130^\circ$ ）。

从前研究磁声波与辐射带电子相互作用的工作中，量化磁声波对辐射带电子影响的方法有待发展与改进，磁声波对粒子的散射、加速的机制与过程的描述也并不清楚：

1) 准线性理论虽然被广泛用于研究空间甚低频波动与辐射带电子相互作用中，但赤道约束的磁声波并不满足它的基本假设（波动在磁力线方向可传播足够多波长，或者相互作用时间显著比波动周期长），因而准线性理论对磁声波的适用性有待确定。此外，准线性理论往往假设波动在频谱上是简单的高斯分布，然而实际中高分辨率仪器所观测的磁声波在频谱上往往具有很强的谐波结构。

2) Bell与Bortnik等人所发展的试验粒子模拟方法有缺陷，本论文指出了其公式中有符号问题，对计算磁声波对电子的作用可产生严重错误，因而也不能得到正确地分析其作用机制。

本论文首先改进了前人的试验粒子模拟方法，使之能正确计算波粒共振相互作用。此外，本论文建立了可模拟任意频率、传播角分布结构的磁声波模型，试验粒子模拟方法可计算各种磁声波模对电子作用的扩散系数。通过理论分析，结合数值模拟，本论文证实，磁声波主要通过朗道共振与辐射带高能电子相互作用。朗道共振的特点是主要在平行方向上加速，因而磁声波通过平行加速近 90° 投掷角电子，使其达到高纬从而形成电子蝴蝶状投掷角分布。此外，磁声波在某些情况下（例如，在低密度区的磁声波，极其接近 90° 传播角的磁声波）可通过 **transit-time** 效应显著地散射电子，这些 **transit-time** 效应不能通过准线性理论量化，需要通过试验粒子模拟来计算。

三、通过卫星对波和粒子的同步观测，结合磁声波对粒子作用的模拟，本论文首次揭示内辐射带、槽区和近地外辐射带高能电子的蝴蝶状分布，是由磁声波对电子的朗道共振形成的。本论文还首次报导，磁声波可在1分钟时间尺度上对 ~ 100 keV 外辐射带电子形成蝴蝶状分布；此外，在大磁暴期间，磁声波可散射外辐射带超相对论电子，使其形成蝴蝶状分布。

前人的工作中，对于在磁声波影响下电子的动态变化，即没有观测证据，也没有

动态模拟，具体来说：

1) 在范阿伦卫星之前的科学卫星对磁声波的观测具有局限性，既缺乏对磁声波的长时间全面观测，也没观测到在磁声波活动期间，辐射带电子的动态变化。

2) 前人的工作中，只模拟了磁声波对高能电子作用的能量（或动量）以及投掷角扩散系数，而没有模拟交叉扩散系数。从前的工作也没有模拟电子相空间分布的动态变化。

本论文指出，必须考虑磁声波对电子作用的动量（或能量）、投掷角交叉扩散系数才能正确模拟电子动态变化。这是由于磁声波主要通过朗道共振散射和加速高能电子，其平行加速机制导致粒子在 (E_k, α) 空间的扩散具有很强的方向性，其交叉扩散系数因而主要为负数。

本论文通过研究磁声波与辐射带电子相互作用的三个事例，总结了磁声波对辐射带高能电子作用的物理机制、作用过程与动态效应。在研究 2013 年 6 月 29 日事件中，本论文清晰地展示磁声波与辐射带 ~ 100 keV 电子蝴蝶状分布的对应关系，结合试验粒子模拟与二维福克-普朗克扩散模拟，本论文模拟出与观测一致的电子相空间分布动态变化，从而揭示磁声波对内辐射带与槽区 ~ 100 keV 高能电子蝴蝶状分布的形成起关键作用。2013 年 8 月 21 日事件的观测与模拟显示，强磁声波可在 1 分钟时间尺度快速散射 ~ 100 keV 外辐射带电子，使之形成蝴蝶状分布。最近的 2015 年 3 月大磁暴事件的观测显示，磁声波可潜在地对高达 4.2 MeV 的超相对论电子形成蝴蝶状分布。

6.2 工作展望

在近地外辐射带的高能电子，包括超相对论电子，其蝴蝶状投掷角分布也是由磁声波平行加速导致。然而与内辐射带、槽区不同的是，近地外辐射带也在等离子体层边界附近，具有多种波动，高能电子的动态变化更复杂。由于外辐射带可同时存在磁声波与合声波，高能电子蝴蝶状分布的形成往往也伴随着合声波加速的过程。如何精确模拟合声波、磁声波联合作用下高能电子的动态变化，将是我们未来工作的一个方向。

磁声波广泛存在于等离子体层内外，范阿伦卫星频繁地观测到大振幅的、分布广泛的磁声波，这些磁声波可与其它波动联合对电子作用。磁声波主要散射大投掷角高能电子，虽然磁声波对小投掷角的电子作用微弱，但是磁声波与电磁离子回旋波或嘶声联合作用，可有效沉降近 90° 投掷角电子，加快高能电子的沉降。这个猜想也有待进一步通过观测与模拟来证实。空间中的超低频波也是当前的研究热点。超低频波导致的向内径向扩散被认为是种子电子通量增强的来源，磁声波与超低频波的联合作用，也是未来值得研究的课题。

范阿伦卫星给人们提供了前所未有的高质量数据，可精确地观测丰富的波动与高能粒子。人们对辐射带的波粒相互作用已有很多了解，但仍然需要结合观测与模拟，更精确地建立全球波动模型，更精确地量化在各种波动作用下辐射带高能电子的动态变化。此外，我们还需要进一步研究波动激发机制，精确模拟磁声波在各种磁暴、亚暴活动期间在粒子注入时的激发，从而建立一个完整的离子激发磁声波、同时磁声波散射加速高能电子的体系。这个体系是将来我们预报辐射带高能电子在整个空间里的动态变化的基石之一，未来也可应用于航天领域里航天器与宇航员的安全防护。

参考文献

- [1] J. A. Allen and L. A. Frank. “Radiation around the earth to a radial distance of 107,400 km”. *Nature*, **1959**, 183: 430–434. <http://dx.doi.org/10.1038/183430a0>.
- [2] J. G. Roederer. *Dynamics of magnetically trapped particles*. Springer-Verlag, Berlin, **1970**.
- [3] M. Walt. *Introduction to Geomagnetically Trapped Radiation*. Cambridge University Press, **1994**.
- [4] D. Baker *et al.* “An extreme distortion of the Van Allen belt arising from the ‘Halloween’ solar storm in 2003.” *Nature*, **2004**, 432(7019): 878–881. <http://dx.doi.org/10.1038/nature03116>.
- [5] W. Jiao. *Space Weather*. Weather Inpress, **2002**.
- [6] R. M. Thorne. “Radiation belt dynamics: The importance of wave-particle interactions”. *Geophysical Research Letters*, **2010**, 37(22). <http://dx.doi.org/10.1029/2010GL044990>.
- [7] J. Jacobs *et al.* “Classification of geomagnetic micropulsations”. *Journal of Geophysical Research*, **1964**, 69(1): 180–181.
- [8] A. Y. Ukhorskiy *et al.* “Impact of ULF oscillations in solar wind dynamic pressure on the outer radiation belt electrons”. *Geophysical Research Letters*, **2006**, 33(6): n/a–n/a. <http://dx.doi.org/10.1029/2005GL024380>.
- [9] Q.-G. Zong *et al.* “Energetic electron response to ULF waves induced by interplanetary shocks in the outer radiation belt”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2009**, 114(A10): n/a–n/a. <http://dx.doi.org/10.1029/2009JA014393>.
- [10] Z.-Y. Pu and M. G. Kivelson. “Kelvin: Helmholtz Instability at the magnetopause: Solution for compressible plasmas”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics (1978–2012)*, **1983**, 88(A2): 841–852.
- [11] S. G. Claudepierre, S. R. Elkington and M. Wiltberger. “Solar wind driving of magnetospheric ULF waves: Pulsations driven by velocity shear at the magnetopause”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2008**, 113(A5): n/a–n/a. <http://dx.doi.org/10.1029/2007JA012890>.
- [12] B. Yang *et al.* “The role of ULF waves interacting with oxygen ions at the outer ring current during storm times”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2011**, 116(A1): n/a–n/a. <http://dx.doi.org/10.1029/2010JA015683>.
- [13] S. G. Claudepierre *et al.* “Van Allen Probes observation of localized drift resonance between poloidal mode ultra-low frequency waves and 60 keV electrons”. *Geophysical Research Letters*, **2013**, 40(17): 4491–4497. <http://dx.doi.org/10.1002/grl.50901>.
- [14] S. R. Elkington, M. K. Hudson and A. A. Chan. “Acceleration of relativistic electrons via drift-resonant interaction with toroidal-mode Pc-5 ULF oscillations”. *Geophysical Research Letters*, **1999**, 26(21): 3273–3276. <http://dx.doi.org/10.1029/1999GL003659>.

- [15] R. A. Mathie and I. R. Mann. “A correlation between extended intervals of Ulf wave power and storm-time geosynchronous relativistic electron flux enhancements”. *Geophysical Research Letters*, **2000**, 27(20): 3261–3264. <http://dx.doi.org/10.1029/2000GL003822>.
- [16] W. W. Liu, G. Rostoker and D. N. Baker. “Internal acceleration of relativistic electrons by large-amplitude ULF pulsations”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **1999**, 104(A8): 17391–17407. <http://dx.doi.org/10.1029/1999JA900168>.
- [17] O. Santolík *et al.* “Spatio-temporal structure of storm-time chorus”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2003**, 108(A7): n/a–n/a. <http://dx.doi.org/10.1029/2002JA009791>.
- [18] U. Taubenschuss *et al.* “Wave normal angles of whistler mode chorus rising and falling tones”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2014**, 119(12): 9567–9578. <http://dx.doi.org/10.1002/2014JA020575>.
- [19] W. Li *et al.* “Typical properties of rising and falling tone chorus waves”. *Geophysical Research Letters*, **2011**, 38(14). <http://dx.doi.org/10.1029/2011GL047925>.
- [20] O. Santolík *et al.* “Fine structure of large-amplitude chorus wave packets”. *Geophysical Research Letters*, **2014**, 41(2). <http://dx.doi.org/10.1002/2013GL058889>.
- [21] W. Li *et al.* “Evaluation of whistler mode chorus amplification during an injection event observed on CRRES”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics (1978-2012)*, **2008**, 113(A9). <http://dx.doi.org/10.1029/2008JA013129>.
- [22] Y. Omura and D. Summers. “Dynamics of high-energy electrons interacting with whistler mode chorus emissions in the magnetosphere”. *Journal of Geophysical Research*, **2006**, 111. <http://dx.doi.org/10.1029/2006JA011600>.
- [23] Y. Omura and H. Matsumoto. “Computer simulations of basic processes of coherent whistler wave-particle interactions in the magnetosphere”. *Journal of Geophysical Research*, **1982**, 87(A6). <http://dx.doi.org/10.1029/JA087iA06p04435>.
- [24] Y. Omura *et al.* “Nonlinear mechanisms of lower-band and upper-band VLF chorus emissions in the magnetosphere”. *Journal of Geophysical Research*, **2009**, 114(A7). <http://dx.doi.org/10.1029/2009JA014206>.
- [25] Y. Omura, N. Furuya and D. Summers. “Relativistic turning acceleration of resonant electrons by coherent whistler mode waves in a dipole magnetic field”. *Journal of Geophysical Research*, **2007**, 112(A6). <http://dx.doi.org/10.1029/2006JA012243>.
- [26] Y. Omura, Y. Katoh and D. Summers. “Theory and simulation of the generation of whistler-mode chorus”. *Journal of Geophysical Research*, **2008**, 113(A4). <http://dx.doi.org/10.1029/2007JA012622>.
- [27] Y. Nishimura *et al.* “Identifying the Driver of Pulsating Aurora”. *Science*, **2010**, 330(6000): 81–84. <http://www.sciencemag.org/content/330/6000/81.abstract>.
- [28] G. Reeves *et al.* “Electron Acceleration in the Heart of the Van Allen Radiation Belts.” *Science (New York, N.Y.)* **2013**, 341: 991–994. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1237743>.
- [29] R. Thorne *et al.* “Rapid local acceleration of relativistic radiation-belt electrons by magnetospheric chorus.” *Nature*, **2013**, 504(7480): 411–414. <http://dx.doi.org/10.1038/nature12889>.

- [30] N. P. Meredith *et al.* “Substorm dependence of plasmaspheric hiss”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics* (1978-2012), **2004**, 109(A6). <http://dx.doi.org/10.1029/2004JA010387>.
- [31] B. Ni *et al.* “Resonant scattering of energetic electrons by unusual low-frequency hiss”. *Geophysical Research Letters*, **2014**, 41(6): 1854–1861. <http://dx.doi.org/10.1002/2014GL059389>.
- [32] J. Bortnik, R. M. Thorne and N. P. Meredith. “The unexpected origin of plasmaspheric hiss from discrete chorus emissions.” *Nature*, **2008**, 452(7183): 62–66. <http://dx.doi.org/10.1038/nature06741>.
- [33] J. Bortnik *et al.* “An observation linking the origin of plasmaspheric hiss to discrete chorus emissions.” *Science (New York, N.Y.)* **2009**, 324(5928): 775–778. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1171273>.
- [34] W. Li *et al.* “Quantifying hiss-driven energetic electron precipitation: A detailed conjunction event analysis”. *Geophysical Research Letters*, **2014**, 41(4). <http://dx.doi.org/10.1002/2013GL059132>.
- [35] R. E. Erlandson and A. J. Ukhorskiy. “Observations of electromagnetic ion cyclotron waves during geomagnetic storms: Wave occurrence and pitch angle scattering”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics* (1978-2012), **2001**, 106(A3): 3883–3895. <http://dx.doi.org/10.1029/2000JA000083>.
- [36] M. J. Engebretson *et al.* “Pc1-pc2 waves and energetic particle precipitation during and after magnetic storms: Superposed epoch analysis and case studies”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics* (1978-2012), **2008**. <http://dx.doi.org/10.1029/2007JA012362>.
- [37] K. Hyun *et al.* “Loss of geosynchronous relativistic electrons by EMIC wave scattering under quiet geomagnetic conditions”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2014**, 119(10): 8357–8371. <http://dx.doi.org/10.1002/2014JA020234>.
- [38] L. Chen *et al.* “Global simulation of EMIC wave excitation during the 21 April 2001 storm from coupled RCM-RAM-HOTRAY modeling”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics* (1978-2012), **2010**, 115(A7). <http://dx.doi.org/10.1029/2009JA015075>.
- [39] null, null and null. “Simulation of EMIC wave excitation in a model magnetosphere including structured high-density plumes”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics* (1978-2012), **2009**, 114(A7). <http://dx.doi.org/10.1029/2009JA014204>.
- [40] V. K. Jordanova, M. Spasojevic and M. F. Thomsen. “Modeling the electromagnetic ion cyclotron wave-induced formation of detached subauroral proton arcs”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics* (1978-2012), **2007**, 112(A8). <http://dx.doi.org/10.1029/2006JA012215>.
- [41] Z. Li *et al.* “Investigation of EMIC wave scattering as the cause for the BARREL 17 January 2013 relativistic electron precipitation event: A quantitative comparison of simulation with observations”. *Geophysical Research Letters*, **2014**, 41(24): 8722–8729. <http://dx.doi.org/10.1002/2014GL062273>.
- [42] T. Kersten *et al.* “Electron losses from the radiation belts caused by EMIC waves”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2014**, 119(11): 8820–8837. <http://dx.doi.org/10.1002/2014JA020366>.

- [43] Z. Yuan *et al.* “Influence of precipitating energetic ions caused by EMIC waves on the subauroral ionospheric E region during a geomagnetic storm”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2014**. <http://dx.doi.org/10.1002/2014JA020303>.
- [44] M. E. Usanova *et al.* “Effect of EMIC waves on relativistic and ultrarelativistic electron populations: Ground-based and Van Allen Probes observations”. *Geophysical Research Letters*, **2014**, 41(5). <http://dx.doi.org/10.1002/2013GL059024>.
- [45] N. P. Meredith *et al.* “Survey of upper band chorus and ECH waves: Implications for the diffuse aurora”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics (1978-2012)*, **2009**, 114(A7). <http://dx.doi.org/10.1029/2009JA014230>.
- [46] B. Ni *et al.* “Global distribution of electrostatic electron cyclotron harmonic waves observed on THEMIS”. *Geophys. Res. Lett.* **2011**, 38: L17105. <http://dx.doi.org/10.1029/2011GL048793>.
- [47] B. Ni *et al.* “Efficient diffuse auroral electron scattering by electrostatic electron cyclotron harmonic waves in the outer magnetosphere: A detailed case study”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics (1978-2012)*, **2012**, 117(A1). <http://dx.doi.org/10.1029/2011JA017095>.
- [48] C. T. Russell, R. E. Holzer and E. J. Smith. “OGO 3 observations of ELF noise in the magnetosphere: 1. Spatial extent and frequency of occurrence”. *Journal of Geophysical Research*, **1969**, 74(3): 755–777. <http://dx.doi.org/10.1029/JA074i003p00755>.
- [49] O. Santolík. “Spatiotemporal variability and propagation of equatorial noise observed by Cluster”. *Journal of Geophysical Research*, **2002**, 107. <http://dx.doi.org/10.1029/2001JA009159>.
- [50] O. Santolík *et al.* “Systematic analysis of equatorial noise below the lower hybrid frequency”. *Annales Geophysicae*, **2004**, 22. <http://dx.doi.org/10.5194/angeo-22-2587-2004>.
- [51] Q. Ma *et al.* “Global distribution of equatorial magnetosonic waves observed by THEMIS”. *Geophysical Research Letters*, **2013**, 40. <http://dx.doi.org/10.1002/grl.50434>.
- [52] Q. Ma *et al.* “The trapping of equatorial magnetosonic waves in the Earth’s outer plasmasphere”. *Geophysical Research Letters*, **2014**. <http://dx.doi.org/10.1002/2014GL061414>.
- [53] S. Perraut *et al.* “A systematic study of ULF Waves Above F H⁺ from GEOS 1 and 2 Measurements and Their Relationships with proton ring distributions”. *Journal of Geophysical Research*, **1982**, 87. <http://dx.doi.org/10.1029/JA087iA08p06219>.
- [54] H. S. Fu *et al.* “First observation of rising-tone magnetosonic waves”. *Geophysical Research Letters*, **2014**, 41(21): 7419–7426. <http://dx.doi.org/10.1002/2014GL061867>.
- [55] S. A. Boardsen *et al.* “Van Allen Probe observations of periodic rising frequencies of the fast magnetosonic mode”. *Geophysical Research Letters*, **2014**. <http://dx.doi.org/10.1002/2014GL062020>.
- [56] L. Chen *et al.* “Global simulation of magnetosonic wave instability in the storm time magnetosphere”. *Journal of Geophysical Research*, **2010**, 115. <http://dx.doi.org/10.1029/2010JA015707>.
- [57] L. Chen *et al.* “Magnetosonic wave instability analysis for proton ring distributions observed by the LANL magnetospheric plasma analyzer”. *Journal of Geophysical Research*, **2011**, 116. <http://dx.doi.org/10.1029/2010JA016068>.

-
- [58] M. Born and E. Wolf. *Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light, 5th ed.* Pergamon, Oxford, U. K., **1975**.
 - [59] L. Chen and R. M. Thorne. “Perpendicular propagation of magnetosonic waves”. *Geophysical Research Letters*, **2012**, 39. <http://dx.doi.org/10.1029/2012GL052485>.
 - [60] R. B. Horne *et al.* “Electron acceleration in the Van Allen radiation belts by fast magnetosonic waves”. *Geophysical Research Letters*, **2007**, 34. <http://dx.doi.org/10.1029/2007GL030267>.
 - [61] T. H. Stix. *The theory of plasma waves*. New York: McGraw-Hill, **1992**.
 - [62] J. Bortnik and R. M. Thorne. “Transit time scattering of energetic electrons due to equatorially confined magnetosonic waves”. *J. Geophys. Res.* **2010**, 115: A07213. <http://dx.doi.org/10.1029/2010JA015283>.
 - [63] Y. Y. Shprits, A. Runov and B. Ni. “Gyro-resonant scattering of radiation belt electrons during the solar minimum by fast magnetosonic waves”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2013**, 118. <http://dx.doi.org/10.1002/jgra.50108>.
 - [64] H. Zhao *et al.* “Peculiar pitch angle distribution of relativistic electrons in the inner radiation belt and slot region”. *Geophysical Research Letters*, **2014**, 41(7): 2250–2257. <http://dx.doi.org/10.1002/2014GL059725>.
 - [65] B. H. Mauk *et al.* “Science Objectives and Rationale for the Radiation Belt Storm Probes Mission”. *Space Science Reviews*, **2012**, 179(1-4). <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-012-9908-y>.
 - [66] J. B. Blake *et al.* “Injection of electrons and protons with energies of tens of MeV into $L < 3$ on 24 March 1991”. *Geophysical Research Letters*, **1992**, 19(8): 821–824. <http://dx.doi.org/10.1029/92GL00624>.
 - [67] M. K. Hudson *et al.* “Relationship of the Van Allen radiation belts to solar wind drivers”. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, **2008**, 70(5): 708–729. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364682607003719>.
 - [68] R. Kessel, N. Fox and M. Weiss. “The Radiation Belt Storm Probes (RBSP) and Space Weather”. *Space Science Reviews*, **2013**, 179(1-4): 531–543. <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-012-9953-6>.
 - [69] D. N. Baker *et al.* “The Relativistic Electron-Proton Telescope (REPT) Instrument on Board the Radiation Belt Storm Probes (RBSP) Spacecraft: Characterization of Earth’s Radiation Belt High-Energy Particle Populations”. *Space Science Reviews*, **2012**, 179(1-4). <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-012-9950-9>.
 - [70] J. Blake *et al.* “The Magnetic Electron Ion Spectrometer (MagEIS) Instruments Aboard the Radiation Belt Storm Probes (RBSP) Spacecraft”. *Space Science Reviews*, **2013**, 179(1-4): 383–421.
 - [71] H. O. Funsten *et al.* “Helium, Oxygen, Proton, and Electron (HOPE) Mass Spectrometer for the Radiation Belt Storm Probes Mission”. *Space Science Reviews*, **2013**, 179(1-4): 423–484. <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-013-9968-7>.
 - [72] C. Kletzing *et al.* “The Electric and Magnetic Field Instrument Suite and Integrated Science (EMFISIS) on RBSP”. *Space Science Reviews*, **2013**, 179(1-4): 127–181. <http://dx.doi.org/10.1007/s11214-013-9993-6>.

- [73] O. Santolík, M. Parrot and F. Lefeuvre. “Singular value decomposition methods for wave propagation analysis”. *Radio Science*, **2003**, 38(1). <http://dx.doi.org/10.1029/2000RS002523>.
- [74] J. D. Means. “Use of the three-dimensional covariance matrix in analyzing the polarization properties of plane waves”. *Journal of Geophysical Research*, **1972**, 77(28): 5551–5559. <http://dx.doi.org/10.1029/JA077i028p05551>.
- [75] Ed. by K. Feng. *Proceedings of 1984 Beijing symposium on Differential Geometry and Differential Equations*. Science Press, Beijing, **1985**: 42–85.
- [76] J. E. Marsden and M. West. *Acta Numerica*, **2001**, 10: 357.
- [77] H. Qin and X. Guan. *Phys. Rev. Lett*, **2008**, 100: 035006.
- [78] H. Qin, X. Guan and W. M. Tang. *Phys. Plasmas*, **2009**, 16: 042510.
- [79] C. Grebogi and R. G. Littlejohn. *Phys. Fluids*, **1984**, 27: 1996.
- [80] R. G. Littlejohn. *J. Plasmas Phys.* **1983**, 29: 111.
- [81] J. G. Roederer and M. Schulz. “Effect of shell splitting on radial diffusion in the magnetosphere”. *Journal of Geophysical Research*, **1969**, 74(16): 4117–4122. <http://dx.doi.org/10.1029/JA074i016p04117>.
- [82] L. Xie and Z. Y. Pu. *Ann. Geophys.* **2006**, 24: 3547.
- [83] X. Tao et al. “Comparison of quasilinear diffusion coefficients for parallel propagating whistler mode waves with test particle simulations”. *Geophys. Res. Lett.* **2011**, 38: L06105. <http://dx.doi.org/10.1029/2011GL046787>.
- [84] T. F. Bell. “The Nonlinear Gyroresonance Interaction Between Energetic Electrons and Coherent VLF Waves Propagating at an Arbitrary Angle With Respect to the Earth’s Magnetic Field”. *J. Geophys. Res.* **1984**, 89: 905–918. <http://dx.doi.org/10.1029/JA089iA02p00905>.
- [85] G. P. Ginet and J. M. Albert. “Test particle motion in the cyclotron resonance regime”. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, **1991**, 3. <http://dx.doi.org/10.1063/1.859778>.
- [86] J. Bortnik. *Precipitation of Radiation Belt Electrons by Lightning-Generated Magnetospherically Reflecting Whistler Waves*. Stanford University Thesis, **2004**: 40.
- [87] J. M. Albert and J. Bortnik. “Nonlinear interaction of radiation belt electrons with electromagnetic ion cyclotron waves”. *Geophys. Res. Lett.* **2009**, 36: L12110. <http://dx.doi.org/10.1029/2009GL038904>.
- [88] J. M. Albert and J. Bortnik. “Correction to “Nonlinear interaction of radiation belt electrons with electromagnetic ion cyclotron waves””. *Geophys. Res. Lett.* **2009**, 36: L24101. <http://dx.doi.org/10.1029/2009GL041850>.
- [89] Z. Su et al. “Bounce-averaged advection and diffusion coefficients for monochromatic electromagnetic ion cyclotron wave: Comparison between test-particle and quasi-linear models”. *J. Geophys. Res.* **2012**, 117: A09222. <http://dx.doi.org/10.1029/2012ja017917>.
- [90] X. Tao et al. “Comparison of bounce-averaged quasi-linear diffusion coefficients for parallel propagating whistler mode waves with test particle simulations”. *J. Geophys. Res.* **2012**, 117: A10205. <http://dx.doi.org/10.1029/2012JA017931>.

-
- [91] J. Bortnik, R. M. Thorne and U. S. Inan. “Nonlinear interaction of energetic electrons with large amplitude chorus”. *Geophys. Res. Lett.* **2008**, 35: L21102. <http://dx.doi.org/10.1029/2008GL035500>.
 - [92] J. Bortnik, U. S. Inan and T. F. Bell. “Temporal signatures of radiation belt electron precipitation induced by lightning-generated MR whistler waves: 1. Methodology”. *J. Geophys. Res.* **2006**, 111: A02204. <http://dx.doi.org/10.1029/2005JA011398>.
 - [93] J. M. Albert, X. Tao and J. Bortnik. “Aspects of Nonlinear Wave-Particle Interactions”. In: *Dynamics of the Earth’s Radiation Belts and Inner Magnetosphere*. American Geophysical Union, **2013**: 255–264. <http://dx.doi.org/10.1029/2012GM001324>.
 - [94] X. Tao and J. Bortnik. “Nonlinear interactions between relativistic radiation belt electrons and oblique whistler mode waves”. *Nonlin. Processes Geophys.* **2010**, 17: 599–604. <http://dx.doi.org/10.5194/npg-17-599-2010>.
 - [95] T. H. Stix. *The theory of plasma waves*. New York: McGraw-Hill, **1962**.
 - [96] L. Chen *et al.* “An improved dispersion relation for parallel propagating electromagnetic waves in warm plasmas: Application to electron scattering”. *J. Geophys. Res.* **2013**, 118: 2185–2195. <http://dx.doi.org/10.1002/jgra.50260>.
 - [97] U. S. Inan, T. F. Bell and R. A. Helliwell. “Nonlinear pitch angle scattering of energetic electrons by coherent VLF waves in the magnetosphere”. *J. Geophys. Res.* **1978**, 83: 3235. <http://dx.doi.org/10.1029/JA083iA07p03235>.
 - [98] U. S. Inan and S. Tkalcevic. “Nonlinear equations of motion for Landau resonance interactions with a whistler mode wave”. *J. Geophys. Res.* **1982**, 87(A4): 2363–2367. <http://dx.doi.org/10.1029/JA087iA04p02363>.
 - [99] D. Summers, R. M. Thorne and F. Xiao. “Relativistic theory of wave-particle resonant diffusion with application to electron acceleration in the magnetosphere”. *Journal of Geophysical Research*, **1998**, 103. <http://dx.doi.org/10.1029/98JA01740>.
 - [100] A. D. M. Walker. *Plasma waves in the magnetosphere*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, **1993**: 168.
 - [101] T. F. Bell and U. S. Inan. “Transient nonlinear pitch angle scattering of energetic electrons by coherent VLF wave packets in the magnetosphere”. *J. Geophys. Res.* **1981**, 86: 9047–9063. <http://dx.doi.org/10.1029/JA086iA11p09047>.
 - [102] H. C. Chang and U. S. Inan. “Quasi-Relativistic Electron Precipitation Due to Interactions with Coherent VLF Waves in the Magnetosphere”. *J. Geophys. Res.* **1983**, 88: 318–328. <http://dx.doi.org/10.1029/JA088iA01p00318>.
 - [103] D. R. Shklyar. “Mechanism for proton precipitation triggered by a VLF wave injected into the magnetosphere”. *ZhETF Pisma Redaktsiiu*, 1985-05: 367–370.
 - [104] D. R. Shklyar. “Particle interaction with an electrostatic VLF wave in the magnetosphere with an application to proton precipitation”. *Planet. Space Sci.* **1986**, 34: 1091–1099.

- [105] J. M. Albert. “Gyroresonant interactions of radiation belt particles with a monochromatic electromagnetic wave”. *Journal of Geophysical Research*, **2000**, 105. <http://dx.doi.org/10.1029/2000JA000008>.
- [106] C. F. Kennel and F. Engelmann. “Velocity Space Diffusion from Weak Plasma Turbulence in a Magnetic Field”. *Physics of Fluids*, **1966**, 9. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1761629>.
- [107] R. M. Thorne *et al.* “Scattering by chorus waves as the dominant cause of diffuse auroral precipitation.” *Nature*, **2010**, 467(7318): 943–946. <http://dx.doi.org/10.1038/nature09467>.
- [108] B. Ni *et al.* “Resonant scattering of plasma sheet electrons by whistler-mode chorus: Contribution to diffuse auroral precipitation”. *Geophysical Research Letters*, **2008**, 35. <http://dx.doi.org/10.1029/2008GL034032>.
- [109] B. Ni *et al.* “Resonant scattering and resultant pitch angle evolution of relativistic electrons by plasmaspheric hiss”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2013**, 118. <http://dx.doi.org/10.1002/2013JA019260>.
- [110] R. M. Thorne *et al.* “Evolution and slow decay of an unusual narrow ring of relativistic electrons near L 3.2 following the September 2012 magnetic storm”. *Geophysical Research Letters*, **2013**, 40. <http://dx.doi.org/10.1002/grl.50627>.
- [111] B. Ni *et al.* “Chorus wave scattering responsible for the Earth’s dayside diffuse auroral precipitation: A detailed case study”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2014**, 119. <http://dx.doi.org/10.1002/2013JA019507>.
- [112] I. Lerche. “Quasilinear Theory of Resonant Diffusion in a Magneto-Active, Relativistic Plasma”. *Physics of Fluids*, **1968**, 11. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1692186>.
- [113] L. R. Lyons and D. J. Williams. *Quantitative Aspects of Magnetospheric Physics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, **1984**.
- [114] L. R. Lyons. “General relations for resonant particle diffusion in pitch angle and energy”. *Journal of Plasma Physics*, **1974**, 12(01): 45–49. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022377800024910>.
- [115] B. Ni *et al.* “Chorus-driven resonant scattering of diffuse auroral electrons in nondipolar magnetic fields”. *Journal of Geophysical Research*, **2011**, 116. <http://dx.doi.org/10.1029/2011JA016453>.
- [116] Y. Y. Shprits and B. Ni. “Dependence of the quasi-linear scattering rates on the wave normal distribution of chorus waves”. *Journal of Geophysical Research*, **2009**, 114. <http://dx.doi.org/10.1029/2009JA014223>.
- [117] H. Zhao *et al.* “Characteristics of pitch angle distributions of hundreds of keV electrons in the slot region and inner radiation belt”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2014**, 119(12): 9543–9557. <http://dx.doi.org/10.1002/2014JA020386>.
- [118] G. D. Reeves *et al.* “Acceleration and loss of relativistic electrons during geomagnetic storms”. *Geophysical Research Letters*, **2003**, 30(10): 1529. <http://dx.doi.org/10.1029/2002GL016513>.
- [119] H. I. West, R. M. Buck and J. R. Walton. “Electron pitch angle distributions throughout the magnetosphere as observed on Ogo 5”. *Journal of Geophysical Research*, **1973**, 78(7): 1064–1081. <http://dx.doi.org/10.1029/JA078i007p01064>.

-
- [120] D. N. Baker *et al.* “High-resolution energetic particle measurements at 6.6 RE 3. Low-energy electron anisotropies and short-term substorm predictions”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **1978**, 83(A10): 4863–4868. <http://dx.doi.org/10.1029/JA083iA10p04863>.
- [121] N. P. Meredith *et al.* “The temporal evolution of electron distributions and associated wave activity following substorm injections in the inner magnetosphere”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2000**, 105(A6): 12907–12917. <http://dx.doi.org/10.1029/2000JA900010>.
- [122] T. A. Fritz *et al.* “Butterfly pitch-angle distributions observed by ISEE-1”. *Planetary and Space Science*, **2003**, 51(3): 205–219.
- [123] R. B. Horne *et al.* “Evolution of energetic electron pitch angle distributions during storm time electron acceleration to megaelectronvolt energies”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics* (1978-2012), **2003**, 108(A1): <http://dx.doi.org/10.1029/2001JA009165>.
- [124] J. L. Gannon, X. Li and D. Heynderickx. “Pitch angle distribution analysis of radiation belt electrons based on Combined Release and Radiation Effects Satellite Medium Electrons A data”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2007**, 112(A5): n/a–n/a. <http://dx.doi.org/10.1029/2005JA011565>.
- [125] X. Gu *et al.* “Statistical analysis of pitch angle distribution of radiation belt energetic electrons near the geostationary orbit: CRRES observations”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2011**, 116(A1): n/a–n/a. <http://dx.doi.org/10.1029/2010JA016052>.
- [126] R. S. Selesnick and J. B. Blake. “Relativistic electron drift shell splitting”. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **2002**, 107(A9): <http://dx.doi.org/10.1029/2001JA009179>.
- [127] D. L. Turner *et al.* “Explaining sudden losses of outer radiation belt electrons during geomagnetic storms”. *Nature Physics*, **2012**, 8(3). <http://dx.doi.org/10.1038/nphys2185>.
- [128] J. Li *et al.* “Interactions between magnetosonic waves and radiation belt electrons: Comparisons of quasi-linear calculations with test particle simulations”. *Geophysical Research Letters*, **2014**, 41(14): 4828–4834. <http://dx.doi.org/10.1002/2014GL060461>.
- [129] L. R. Lyons and D. J. Williams. *Quantitative Aspects of Magnetospheric Physics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, **1984**.

附录 A 波动与粒子各参数在各文献中的不同约定

从前有很多文献发展或应用了波粒共振相互作用的试验粒子模拟公式。在不同文献中，人们采取了不同的对传播角 ψ 与波动相位 Φ 的定义，以及不同的对 z 轴、平行波数 $k_{\parallel}$ 与平行动量 $p_{\parallel}$ 的正方向的规定。为了便于比较从前文献中的公式，我们总结了波和粒子各参数在各文献中的不同定义，见表 A.1。

1. 本论文我们定义 z 轴和 $p_{\parallel}$ 的正方向为沿着背景磁场的方向，然而，某些研究平行传播的哨声波的文献^[97,101]对它们的定义比较复杂：模拟电磁波时，定义 z 轴为沿背景磁场的方向，但是在模拟粒子运动时，定义 z 轴为反平行于磁场方向。
2. 在大部分文献中，波动传播角 ψ 的定义是波矢 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{e}_z$ 的夹角^[85,93,94,97,98]，但是 Bell^[84] 和 Bortnik^[86] 定义其为波矢与 $-\mathbf{e}_z$ 的夹角，因而 $k_{\parallel}$ 的正方向为反平行于背景磁场的方向。
3. 在大部分文章中，波动相位的定义为 $\Phi = \omega t - \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}$ ，但是 Ginete and Albert^[85]，Tao and Bortnik^[94] 以及 Albert *et al.*^[93] 取相反的定义，即 $\Phi = \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} - \omega t$ 。
4. 斜传播的哨声模波动的形式也有很大不同。Inan and Tkalcevic 建立的波动模拟为复数模型，即方程 (A.1)，

$$\mathbf{B}^w = \mathbf{B}_0^w e^{i\Phi}, \quad \mathbf{E}^w = \mathbf{E}_0^w e^{i\Phi}; \quad (\text{A.1})$$

Bell^[84] 与 Bortnik^[86] 使用了下列表达式

$$\mathbf{B}^w = \mathbf{e}_x B_x^w \cos \Phi + \mathbf{e}_y B_y^w \sin \Phi - \mathbf{e}_z B_z^w \cos \Phi, \quad (\text{A.2a})$$

$$\mathbf{E}^w = -\mathbf{e}_x E_x^w \sin \Phi + \mathbf{e}_y E_y^w \cos \Phi - \mathbf{e}_z E_z^w \sin \Phi; \quad (\text{A.2b})$$

这里 $B_{x,y,z}^w$ 与 $E_{x,y,z}^w$ 的各项都是正实数；Ginete and Albert^[85] 使用了下列表达式

$$\mathbf{B}^w = \mathbf{e}_x B_x^w \sin \Phi + \mathbf{e}_y B_y^w \cos \Phi - \mathbf{e}_z B_z^w \sin \Phi, \quad (\text{A.3a})$$

$$\mathbf{E}^w = \mathbf{e}_x E_x^w \cos \Phi - \mathbf{e}_y E_y^w \sin \Phi - \mathbf{e}_z E_z^w \cos \Phi, \quad (\text{A.3b})$$

文章	z	$p_{\parallel}$	ψ	$k_{\parallel}$	Φ	波动形式
Inan <i>et al.</i> 1978 ^[97]	$\pm \mathbf{B}$	$-\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$+$	Eq. (A.2)
Inan and Tkalcevic 1982 ^[98]	$+\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$+$	Eq. (A.1)
Bell 1984 ^[84] and Bortnik 2004 ^[86]	$+\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$-\mathbf{B}$	$-\mathbf{B}$	$+$	Eq. (A.2)
Ginet and Albert 1991 ^[85]	$+\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$-$	Eq. (A.3)
Tao and Bortnik 2010 ^[94]	$+\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$-$	Eq. (A.4)
本论文	$+\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$+\mathbf{B}$	$+$	Eq. (3.25)

表 A.1 前人研究中对波和粒子各参数的定义一览。

以及 Tao and Bortnik^[94] 选取了下列表达式

$$\mathbf{B}^w = \mathbf{e}_x B_x^w \cos \Phi - \mathbf{e}_y B_y^w \sin \Phi + \mathbf{e}_z B_z^w \cos \Phi, \quad (\text{A.4a})$$

$$\mathbf{E}^w = -\mathbf{e}_x E_x^w \sin \Phi - \mathbf{e}_y E_y^w \cos \Phi - \mathbf{e}_z E_z^w \sin \Phi. \quad (\text{A.4b})$$

虽然这些物理项的符号可以任意规定，但诸多不同的规定，使得新进入这个领域的人带来很大困难。我们这里通过表 A.1 将上述不同规定做一个总结。我们在正文中指出了 Bell 与 Bortnik 等人的公式中的符号问题，由于不同规定的复杂性，我们也在正文中给出了一个与约定无关的符号检验方法（详见正文）。

附录 B 扩散曲线方程的推导

在第四章中，我们提到波粒共振相互作用的扩散曲线（diffusion curve）。这里我们给出共振曲线方程的推导。我们把法拉弟方程代入电磁波动模型 (3.25) 中，得到

$$B_x = -k_{\parallel} E_y / \omega, \quad (\text{B.1a})$$

$$B_y = k_{\parallel} E_x / \omega - k_{\perp} E_z / \omega, \quad (\text{B.1b})$$

$$B_z = k_{\perp} E_y / \omega, \quad (\text{B.1c})$$

从对左旋、右旋磁场与电场波动的定义 $B_R = (B_x^w + B_y^w) / 2$, $B_L = (B_x^w - B_y^w) / 2$, $E_R = (E_x^w - E_y^w) / 2$ 及 $E_L = (E_x^w + E_y^w) / 2$ 中，我们得到

$$B_R = \frac{k_{\parallel}}{\omega} E_R - \frac{k_{\perp}}{2\omega} E_z, \quad (\text{B.2a})$$

$$B_L = -\frac{k_{\parallel}}{\omega} E_L + \frac{k_{\perp}}{2\omega} E_z, \quad (\text{B.2b})$$

$$B_z = \frac{k_{\perp}}{\omega} E_y = \frac{k_{\perp}}{\omega} (E_L - E_R). \quad (\text{B.2c})$$

将上述关系代入方程 (B.2) 中我们得到

$$\begin{aligned} -\frac{F_{\parallel}^w}{e} &= E_z J_l + v_{\perp} \left(\frac{k_{\parallel}}{\omega} E_R - \frac{k_{\perp}}{2\omega} E_z \right) J_{l-1} \\ &\quad - v_{\perp} \left(-\frac{k_{\parallel}}{\omega} E_L + \frac{k_{\perp}}{2\omega} E_z \right) J_{l+1}. \end{aligned} \quad (\text{B.3a})$$

$$\begin{aligned} -\frac{F_{\perp}^w}{e} &= E_R J_{l-1} - v_{\parallel} \left(\frac{k_{\parallel} E_R}{\omega} - \frac{k_{\perp} E_z}{2\omega} \right) J_{l-1} \\ &\quad + E_L J_{l+1} + v_{\parallel} \left(-\frac{k_{\parallel} E_L}{\omega} + \frac{k_{\perp} E_z}{2\omega} \right) J_{l+1}. \end{aligned} \quad (\text{B.3b})$$

利用贝塞尔函数的性质

$$J_{l-1} + J_{l+1} = \frac{2l}{\beta} J_l = \frac{2l\omega_{ce}/\gamma}{k_{\perp} v_{\perp}} J_l, \quad (\text{B.4})$$

以及共振条件 $\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = l\omega_{ce}/\gamma$ ，我们得到

$$-\frac{F_{\parallel}^w}{e} = \frac{k_{\parallel}v_{\parallel}}{\omega}E_z J_l + \frac{k_{\parallel}v_{\perp}}{\omega}E_R J_{l-1} + \frac{k_{\parallel}v_{\perp}}{\omega}E_L J_{l+1}, \quad (\text{B.5a})$$

$$-\frac{F_{\perp}^w}{e} = \frac{l\omega_{ce}}{\gamma\omega} \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} E_z J_l + \frac{l\omega_{ce}}{\gamma\omega} E_R J_{l-1} + \frac{l\omega_{ce}}{\gamma\omega} E_L J_{l+1}. \quad (\text{B.5b})$$

最终，通过对比上述两公式，我们得到以下关系

$$F_{\perp}^w = F_{\parallel}^w \frac{l\omega_{ce}}{\gamma k_{\parallel} v_{\perp}} = F_{\parallel}^w \frac{l\omega_{ce}}{\gamma\omega - l\omega_{ce}} \cot \alpha, \quad (\text{B.6})$$

$$p_{\perp} dp_{\perp}^w = \frac{l\omega_{ce}}{\gamma\omega - l\omega_{ce}} p_{\parallel} dp_{\parallel}^w. \quad (\text{B.7})$$

这个方程代表了粒子在 $(p_{\parallel}, p_{\perp})$ 空间的扩散方向，即粒子在与单色电磁波共振过程中，在动量相空间沿着这个方向扩散^[99]。

忽略绝热运动，方程 (B.7) 即

$$p_{\perp} dp_{\perp} = \frac{l\omega_{ce}}{\gamma\omega - l\omega_{ce}} p_{\parallel} dp_{\parallel}, \quad (\text{B.8})$$

代入共振条件即得

$$p_{\perp} dp_{\perp} = \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{k_{\parallel} v_{\parallel}} p_{\parallel} dp_{\parallel}^w, \quad (\text{B.9})$$

即

$$\frac{1}{2} dp_{\perp}^2 = -\frac{1}{2} d(p_{\parallel} - \gamma m \frac{\omega}{k_{\parallel}})^2. \quad (\text{B.10})$$

上述方程写成积分形式即

$$p_{\perp}^2 + (p_{\parallel} - \gamma m \frac{\omega}{k_{\parallel}})^2 = 0, \quad (\text{B.11})$$

转化为速度空间即得

$$v_{\perp}^2 + (v_{\parallel} - \frac{\omega}{k_{\parallel}})^2 = 0. \quad (\text{B.12})$$

这个方程是扩散方程^[99,129]的另外一种形式。

博士期间发表的论文统计

博士期间以第一作者身份发表的文章

1. **Jinxing Li**, Binbin Ni, Lun Xie, Zuyin Pu, Jacob Bortnik, Richard M. Thorne, Lunjin Chen, Qianli Ma, Suiyan Fu, Qiugang Zong, Xiaogang Wang, Chijie Xiao, Zhonghua Yao, and Ruilong Guo (2014), Interactions between magnetosonic waves and radiation belt electrons: Comparisons of quasi-linear calculations with test particle simulations, *Geophys. Res. Lett.*, 41, DOI: 10.1002/2014GL060461.

2. **Jinxing Li**, Jacob Bortnik, Lun Xie, Zuyin Pu, Lunjin Chen, Binbin Ni, Xin Tao, Richard M. Thorne, Suiyan Fu, Zhonghua Yao, and Ruilong Gu, (2015), Comparison of Formulas for Resonant Interactions between Energetic Electrons and Oblique Whistler-mode Waves, *Phys Plasmas* (0529025), doi: 10.1063/1.4914852.

3. **Jinxing Li**, Hong Qin, Zuyin Pu, Lun Xie, Suiyan Fu (2011), Variational symplectic algorithm for guiding center dynamics in the inner magnetosphere, *Phys Plasmas*, 18 (0529025). doi:10.1063/1.3589275.

4. **LI Jin-Xing**, CAO Ming-Tao, HAN Liang, QI Yue-Rong, ZHANG Shou-Gang, GAO Hong, LI Fu-Li, T. C. Killian (2011), Calculation of Ion Equilibrium Temperature in Ultracold Neutral Plasmas, *Chinese Phys Lett*, 28, 123201, doi:10.1088/0256-307X/28/12/123201.

在审的第一作者文章

Jinxing Li, Binbin Ni, Qianli Ma, Lun Xie, Zuyin Pu, Suiyan Fu, R. M. Thorne, J. Bortnik, Lunjin Chen, Wen Li, Daniel N. Baker, Craig A. Kletzing, William S. Kurth, George B. Hospodarsky, Geoffrey D. Reeves, Harlan E. Spence, and Herbert O. Funsten, Formation of Inner Magnetospheric Energetic Electron Butterfly Distributions due to Scattering by Equatorial Magnetosonic Waves.

博士期间以合作者身份发表的文章

1. Chen L., A. Maldonado, J. Bortnik, R. M. Thorne, **J. Li**, L. Dai, X. Zhan (2015), Non-linear bounce resonances between magnetosonic waves and equatorially mirroring electrons, *J. Geophys. Res. Space Physics*, doi: 10.1002/2015JA021174.
2. Bortnik, J., R. M. Thorne, B. Ni, and **J. Li** (2015), Analytical approximation of transit time scattering due to magnetosonic waves, *Geophys. Res. Lett.*, 42, doi:10.1002/2014GL062710.
3. Xiong Y, Xie L, **Li J X**, Zhang H, Fu S Y, Pu Z Y, Variation characteristics of relativistic electron fluxes in the outer radiation belt with different energies during geomagnetic storms (in Chinese). *Chin Sci Bull*, 2015, 60: 1–8, doi: 10.1360/N972014-00761.
4. S. S. Chang, Binbin Ni, J. Bortnik, C. Zhou, Z. Y. Zhao, **J. X. Li**, and X. D. Gu (2013), Resonant scattering of energetic electrons in the plasmasphere by monotonic whistler-mode waves artificially generated by ionospheric modification, *Ann. Geophys.*, 32, 507-518, 2014, doi:10.5194/angeo-32-507-2014.
5. J. Zhong, L. Xie, H. Zhang, **J. X. Li**, Z. Y. Pu, M. Nowada, X. D. Wangd, X. Y. Wange, G. K. Parks, Q. G. Zong, S. Y. Fu, R. L. Guo, Z. H. Yao, X. G. Zhang, H. Reme, S. J. Wang (2013) Chang'E-1 observations of pickup ions near the Moon under different interplanetary magnetic field conditions, *Planet Space Sci*, 79-80, 56-63. DOI: 10.1016/j.pss.2013.02.001.
6. Ruilong Guo, Zuyin Pu, Chijie Xiao, Xiaogang Wang, Suiyan Fu, Lun Xie, Qiugang Zong, Jiansen He, Zhonghua Yao, Jun Zhong, and **Jinxing Li**, (2013), Separator reconnection with antiparallel/component features observed in magnetotailplasmas, *J. Geophys. Res. Space Physics*, 118, 6116–6126, doi:10.1002/jgra.50569.
7. Z. H. Yao, Z. Y. Pu, S. Y. Fu, V. Angelopoulos, M. Kubyshkina, X. Xing, L. Lyons, Y. Nishimura, L. Xie, X. G. Wang, C. J. Xiao, X. Cao, J. Liu, H. Zhang, M. Nowada, Q. G. Zong, R. L. Guo, J. Zhong, **J. X. Li** (2012), Mechanism of substorm current wedge formation: THEMIS observations, *Geophys Res Lett*, 39 (L13102), DOI: 10.1029/2012GL052055

致谢

终于要毕业了，在北大的六年如一梦，恍然间已经悄然过去。但细细回忆，期间的故事又太多，太多欢笑，太多失落，太多艰辛，太多迷惘。我的北大生涯不够完美，但很完整。

用时间和空间来总结我的研究生生涯，六年间我在不断变换的环境中充实地度过。三次赴中科大跟秦宏老师学习模拟，半年的科大生活在我心中播下科学梦想的种子。三次赴 UCLA 跟领域内大咖 Richard Thorne 与 Jacob Bortnik 学习基础理论，8 个月里沐浴着加州灿烂的阳光，科学之梦花开灿烂。三次去武汉大学跟倪彬彬老师合作，最终收获令自己骄傲的科学果实。

能有这么多机会，跟全世界的资深同行共事，是北大给我的幸运。濮老师、谢老师与傅老师三位导师给我的支持超过了一般师生。科学研究向来是往一片大家都未知的领域探索，三位导师给我选择了一个有潜力同时有风险的方向，但最终证明这是很有远见的选择。期间，我几度感到山重水复疑无路，觉得自己快做不下去了，是同班同学中科研最屌丝的那一个。甚至到第4年，依然前途茫茫，没有成果。但仍然坚持了下来，终于在最后两年闯出一条新路，也看到了一片新的天空。感谢我人生的贵人倪彬彬教授，不仅是我的科研导师，给我的科研带来了明媚的阳光，更是我一生的朋友，开启了我人生美好的前景。

感谢涂传治老师、肖佐老师、宗秋刚老师、陈鸿飞老师、张东和老师、郝勇强老师、何建森老师等多位老师多年来的教诲。感谢各位老师精彩的课程，不仅给了我空间物理的知识，更是给了我科学、对世界的认知。I am most grateful to the PI teams of the Van Allen Probe mission, especially Daniel N. Baker, Craig A. Kletzing, William S. Kurth, George B. Hospodarsky, Geoffrey D. Reeves, Harlan E. Spence, and Herbert O. Funsten. Great thanks for the high quality data, which enable me produing great research works, and thank you all for your great assisistence towards my paper. 本论文的研究工作受如下基金项目的资助：中国重点科研项目 (No. 2011CB811404, 2011CB811404)，中国国家自然科学基金项目 (No. 11075162, 41374166, 41274167, 41204120, 41474141, 40831061)，中国科学技术部项目 (No. 2010GB107000)，以及美国 NSF's Geospace Environment Modeling 等项目。

在北大这片园子里，我见识到了许多聪明可爱的小伙伴们。我们实验室总是充满欢乐的笑声，在这样的环境中，大家愉快地一起合作一起学习。尤记得 6 年前，刚来

北大时，郑昊班长经常组织班级活动。感谢王承睿、胡仲旻、金亚奇，以及班上三只可爱的美女王新、袁憧憬、刘小坤与我在一起的时候，我们一起学习，一起 party，三国杀，记忆中的岁月太美好。如今大家都有了好的归宿。

感谢我们组的魏勇、王珏、钟俊、尧中华、郭瑞龙，刚进组里开始科研工作，是你们解答了我无数疑问。不知不觉，我也成为师兄，而且成为组里的大师兄，顿感责任重大。感谢吕雷奇、熊鹰、魏鸿江、刘洋师弟，以及张坤小师妹，每个星期的组会，我们在讨论中不断收获，我也从你们的工作学到了新知识。感谢雷明达小师弟，近一年里对你工作的指导让我也处于不断思考中，你每次做报告画出非常炫的图表，以及在组会中各种有趣的故事，使我们严肃的组会充满了欢乐。

感谢我刚进入研究所时结识的各位师兄师姐，杨彪、田晖、阿尔察、莫晓华、蔡磊、侍颢等各位师兄，以及姚硕、郭荔嘉、乐超、齐羽等各位师姐，因为有你们，让我一进研究所就感觉到这里欢乐、积极的气氛，坚信自己来北大学习空间物理是一个无比正确的决定。感谢实验室才华无双、天才型选手张磊同学，带我进入 linux 天地，构架服务器，解决无数问题。实验室后来不断涌入新鲜活泼的师弟师妹，陪伴了我在北大后三年时光，空间物理的未来是你们的！

感谢在中科大学习的时光里，陪伴我一起学习、一起玩的小伙伴们，你们让我见识了科大才子才女的聪明与才情。感谢在武汉大学工作期间，和我在一个实验室的小伙伴们，我们每天一起吃饭，一起看世界杯，岁月太难忘。感谢在 UCLA 认识的各位师兄师姐，尤其是储项宁、刘江、乐超、阿 p 哥、煦之哥、李雯、陈伦锦、张晓佳、马千里，在我初去一个陌生的国度的岁月里，感觉到空间物理大家庭的温暖。

在北大社团里见识到更多的才子佳人。在车协，我感受到这是一个组织专业、纪律严明、奋发向上的团队。在赣文化交流学会，感受到家的温暖，暑期同 23 个伙伴们赴江西各地实践，是一段最难忘的记忆。在摄影学会，学到的不仅是摄影技术，更是对生活的品味，原来一个专业的团队可以这么可爱、搞怪。

最需要感谢的是我的父母。20 多年前，你们从江西的一个小山村走出来，到县城里做生意，筚路蓝缕，如今创业成功。你们给了我良好的教育环境，我也从你们艰辛创业的历程，得到不断的激励。

如果没有来北大，我会是在哪里，我会过得怎么样？我不知道。但我知道，这片独一无二的园子，是承载我最美好年华的地方，见证了我的奋发，也见证过我的彷徨，留下了我的欢笑，也默默地保存着我的心泪。这片园子，永远是我的灵魂家园，是我开拓新天地的动力之源。

北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名： 日期： 年 月 日

学位论文使用授权说明

（必须装订在提交学校图书馆的印刷本）

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

- 按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；
- 学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务，在校园网上提供服务；
- 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；
- 因某种特殊原因需要延迟发布学位论文电子版，授权学校在 ☐ 一年 / ☐ 两年 / ☐ 三年以后在校园网上全文发布。

（保密论文在解密后遵守此规定）

论文作者签名： 导师签名： 日期： 年 月 日